第十一章

民主原则和权威主义

多主体认知逻辑的研究分为成员主体和系统主体两个方面。其中系统主体又有简单群体主体和集体主体（参见序言 2)。简单群体主体的认知与知识的性质、特点以及推理规律的研究可以分为两个方面：以双主体为代表的多个单主体系统的研究，类似可以推广到任意多的主体组成的认知系统；多主体动态认知逻辑关于群体知识等方面的研究。这些在前面的各章中已有所讨论。本章和下一章是关于集体主体认知和知识的性质等方面的研究，建立相应的集体认知和知识的逻辑。

民主原则和权威主义是影响和决定集体认知和知识形成的两种重要因素。集体主体是最为复杂的多主体系统，有不同的研究方法。本章在关于简单群体主体认知和知识的逻辑和语义的基础上，引入表达民主原则和权威主义的认知模态，建立相应的语义学和逻辑系统，以刻画实行民主原则和具有权威的集体主体的认知和知识。这里的简单群体指的是多个单主体的简单聚合形成的系统，以下称为简单多主体（系统)。集体主体有多种类型。本章所说的集体是在简单多主体系统中增加民主原则和权威得到的多主体系统。

本章共五节：§11.1 建立相应的形式语言，给出关于集体主体的民主原则和权威主义的形式表达。§11.2 建立简单多主体认知逻辑的语义解释，由单主体认知逻辑的语义解释复合而成。§11.3 建立基本简单多主体认知逻辑系统，它由单主体认知逻辑系统复合而成，通过归约的方法证明其可靠性和完全性。§11.4 在简单多主体认知逻辑中定义用以表达集体主体民主原则的认知模态，建立关于实行广义民主原则的集体主体的认知逻辑。§11.5

在简单多主体认知逻辑中引入表达权威的认知模态，建立关于带权威的集体主体的认知逻辑，讨论了个人权威和团体权威两类权威。

§11.1　关于集体知识的基本思想

集体知识与普通的群体知识不同，一个集体所具有的知识并不一定要求构成集体的每个成员都有这个知识。一个认知主体的认知对象有三类：纯客观命题，自己的主观命题或仅包括自己主观命题的客观命题，他人的主观命题或包括他人主观命题的客观命题。前两类认知对象称为简单认知对象。

设$a_1,\cdots, a_n$是我们所讨论的全部n个主体，多主体认知逻辑基本语句是“主体a_i认知命题α”，对于简单多主体认知逻辑来说，α 中不含除a_i以外的主体的主观命题。

和单主体认知逻辑类似，多主体认知逻辑也将基本语句“主体a_i认知命题 α”表示为$B_{ai}\alpha$。从形式上说，下标a_i的作用在于区别不同认知主体的认知算子，所以可以将其简记为$B_i\alpha$。

在我们考虑的认知逻辑中，对于每个认知个体a_i来说，不包括他人主观命题的所有命题恰好构成一个相对于他的单主体认知逻辑，这逻辑中的命题称为i-命题。而简单多主体认知逻辑的命题就是由所有的i-命题用联结词联结而成的。

下面给出一个关于有 n 个认知主体的简单多主体认知逻辑的形式语言，该语言记作 L。

一、初始符号

(1) 命题变项　$\mathbf{r}_1,\cdots, \mathbf{r}_n\cdots\cdots$;

(2) 联结词　$\neg, \rightarrow$;

(3) 认知算子　$B_1,\cdots, B_n$;

(4) 括号　)，(　。

二、形成规则

(1) i-公式，$1\leq i\leq n$

1.1 命题变项是 i-公式；

1.2 如果 α 是 i-公式，则$\neg\alpha$ 是 i-公式；

1.3 如果 α, β 是 i-公式，则$(\alpha \rightarrow \beta)$是 i-公式；

1.4 如果 α 是i-公式，则$B_i\alpha$ 是i-公式。

(2) 公式

1.1 任给 $1 \le i \le n$，i-公式是公式；

1.2 如果 α 是公式，则$\neg\alpha$ 是公式；

1.3 如果 α, β 是公式，则 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 是公式。

i-公式中形如$B_i\alpha$ 的公式称为i-主观公式，其它公式称为i-客观公式。

不含任何B_i的公式称为纯客观公式，它是任何i-客观公式，而且恰好是i-客观公式的公共部分，也是i-公式的公共部分。

在公式$B_i\alpha$ 中，α 一定是i-公式。所以，如果$i \neq j$，$B_i\alpha$ 和$B_j\alpha$ 都是公式，则 α 一定是纯客观公式。

纯客观公式恰好是古典命题逻辑的公式，所以在客观公式上可以使用重言式、矛盾式等概念。

任给 $1 \le i \le n$，在L中取一个认知算子B_i就构成L的一个子语言L_i，L_i是以B_i为认知算子的单主体认知逻辑的语言，单主体认知逻辑语言L_i的公式恰好是全体i-公式。

11.1.1 定义 代入 $\alpha, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是公式，$p_1, \cdots, p_n$ 是命题变项。$\alpha(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n)$(在 α 中将 β_i代入p_i)归纳定义如下：

(1) α 是命题变项，$\alpha(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n) = \begin{cases} \beta_i & \text{如果 } \alpha = p_i \\ \alpha & \text{如果 } \alpha \neq p_i \text{；} \end{cases}$

(2) $\alpha = \neg\beta$，则 $\alpha(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n) = \neg(\beta(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n))$；

(3) $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$，则 $\alpha(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n) = \beta(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n) \rightarrow \gamma(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n)$；

(4) $\alpha = B_i\beta$, $\varphi_{m1} \cdots, \varphi_{mk}$是$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$中的全部i-公式，则 $\alpha(\varphi_1/p_1, \cdots, \varphi_n/p_n) = B_i(\beta(\varphi_{m1}/p_{m1}, \cdots, \varphi_{mk}/p_{mk}))$。

(4)的限制就是为了保证 $\beta(\varphi_{m1}/p_{m1}, \cdots, \varphi_{mk}/p_{mk})$ 是i-公式。

任何公式都可以看成纯客观公式的代入。而且代入的公式还可以都是主观公式。

11.1.2 定义 置换 α, φ, ψ 是公式。ψ 的类别小于等于φ 的类别。$\alpha[\psi/\varphi]$(在α中将 ψ 置换 φ) 归纳定义如下：

(1) φ 不是 α 的子公式，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \alpha$；

(2) φ 是 α 的子公式，则

2.1 $\alpha = \varphi$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \psi$

2.2 $\alpha = \neg\beta$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \neg(\beta[\psi/\varphi])$；

2.3 $\alpha = \beta\rightarrow\gamma$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \beta[\psi/\varphi]\rightarrow\gamma[\psi/\varphi]$；

2.4 $\alpha = \mathrm{B}\beta$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \mathrm{B}(\beta[\psi/\varphi])$。

限制 ψ 的类别小于等于 φ 的类别，是为了保证置换后还是公式，要证明它还是不容易的。当 ψ 和 φ 的同类别时证明置换后还是公式就非常简单了。实际上，我们使用的主要都是同类别的置换。

简单多主体认知逻辑的语义本质上没有增加新的内容，它是单主体认知逻辑的语义的复合。i-公式的满足归结到相应的单主体认知逻辑语义的满足。而混合公式的满足通过 i-公式的满足应用古典逻辑的规则而得到。

首先建立仅仅作为n个单主体认知复合的逻辑简单多主体认知逻辑，称为基本的简单多主体认知逻辑，通过归约的方法讨论它们的可靠性和完全性。并在其中定义一种群体的认知模态。这种认知模态是“至少有k个人认知”，用$\mathrm{B}^{(k)}$表示。$\mathrm{B}^{(k)}$的意义就是“至少有k个人认定”。

我们讨论两类重要的关系。

第一类是广义民主原则。它是说个人服从 k 个人的意见，当 k/n>1/2 时，就是民主原则：个人服从多数人的意见。

一般的广义民主原则是说：“至少有 k 个人认定”的也是个人所认定的。形式表示为：

$$\mathrm{B}^{(k)}\alpha\rightarrow\mathrm{B}_i\alpha$$

一般的广义民主原则也称为服从原则，还有一种弱服从原则，也称为不反对原则：个人不反对“至少有 k 个人认定”的命题。形式表示为：

$B^{(k)}\alpha \rightarrow \neg B_i \neg\alpha$

广义民主原则只是说“至少有 k 个人认定”的也是个人认定的，而对于没有“至少有 k 个人认定”的命题，个人是否认定是没有限制的。

第二类是权威主义。权威有两种：个人权威和团体权威。

先考虑个人权威。对应于权威的认知模态用 A 表示。个人对于权威有两种态度。一种是个人服从权威，权威认定的其他个人也认定。形式表示为：

$A\alpha \rightarrow B_i\alpha$

另一种个人弱服从权威，也称为个人不反对权威，权威认定的其他个人不反对。形式表示为：

$A\alpha \rightarrow \neg B_i \neg\alpha$

再考虑团体权威。构成权威的团体的认知分别用A_1, …, A_m表示。在团体内部是用民主原则确定团体权威的，用$A^{(k)}\alpha$表示。个人对于团体权威态度也是两种，个人服从权威，个人不反对权威。这两种态度的形式表示是：

$A^{(k)}\alpha \rightarrow B_i\alpha$

$A^{(k)}\alpha \rightarrow \neg B_i \neg\alpha$

由于权威性质的不同，个人对于权威的两种态度，在性质上就有所不同。

表达个体权威形式语言可以在L的基础上通过增加模态算子A得到，表达团体权威的形式语言可以在L的基础上通过增加模态算子A_1, …, A_m得到。

§11.2　简单多主体认知逻辑的语义

简单多主体认知逻辑的语义是单主体认知逻辑的语义的复合。

设L是有n个主体的简单多主体认知逻辑的语言，L_1,…, L_n是相应的n个单主体认知逻辑的语言。

11.2.1 定义　框架　$K = \langle o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n \rangle$ 称为框架，如果W是非空集合，U_1,…, U_n都是W的子集，R_1,…, R_n都是W上的二元关系，$o \notin W$。

o是现实世界，R_i是主体i的认知通达关系，U_i是主体i所认识的世界。W是每个认知主体

的认知可能世界集。

人们可能会有疑问，为何只有一个公共的认知可能世界集。实际上，主体i的认知可能世界集是U_i的R_i-闭包U_i*，但对于U_i*的任何扩充来说，基本的语义结果—公式的可满足性—都是一样的，所以我们可以将U_i的R_i-闭包U_i*的任何扩充都看成主体i的认知可能世界集。这样，通过扩充，任意多个认知主体都可以有相同的认知可能世界集。

11.2.2 定义 赋值和模型 $K = \langle o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n\rangle$ 是框架。V是全体公式的集合**Form**到W∪{o}的幂集P(W∪{o})的映射。如果V满足以下条件，则称V是K上赋值：

(1) $u\in V(\neg\alpha)$ 当且仅当 $u\notin V(\alpha)$；

(2) $u\in V(\alpha\rightarrow\beta)$ 当且仅当 $u\notin V(\alpha)$或 $u\in V(\beta)$；

(3) 对于 $u\in W$ 有

$u\in V(B_i\alpha)$ 当且仅当 任给$v\in W$，如果uR_iv，则$v\in V(\alpha)$；

对于 o 有

$u\in V(B_i\alpha)$ 当且仅当 任给$v\in U_i$，都有$v\in V(\alpha)$。

$V(\alpha)$ 称为 α 在 V 下的值。$M = \langle K, V\rangle$称为模型。

和单主体认知逻辑类似，由赋值的定义可知：

(1) $u\notin V(\neg\alpha)$ 当且仅当 $u\in V(\alpha)$；

(2) $u\notin V(\alpha\rightarrow\beta)$ 当且仅当 $u\in V(\alpha)$且 $u\notin V(\beta)$；

(3) 对于 $u\in W$ 有

$u\notin V(B_i\alpha)$ 当且仅当 存在$v\in W$，使得uRv且$v\notin V(\alpha)$；

对于 o 有

$o\notin V(B_i\alpha)$ 当且仅当 存在$v\in U_i$，都有$v\notin V(\alpha)$。

(4) $u\in V(\alpha\wedge\beta)$ 当且仅当 $u\in V(\alpha)$且 $u\in V(\alpha)$，

$u\notin V(\alpha\wedge\beta)$ 当且仅当 $u\notin V(\alpha)$或 $u\notin V(\alpha)$。

(5) $u\in V(\alpha\vee\beta)$ 当且仅当 $u\in V(\alpha)$或 $u\in V(\beta)$，

$u\notin V(\alpha\vee\beta)$ 当且仅当 $u\notin V(\alpha)$且 $u\notin V(\alpha)$。

(6) $u\in V(\alpha\leftrightarrow\beta)$ 当且仅当 $u\in V(\alpha)$且 $u\in V(\beta)$)或($u\notin V(\alpha)$且 $u\in\notin V(\beta)$，

$u \notin V(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ 当且仅当 ($u \in V(\alpha)$且 $u \notin V(\beta)$)或($u \notin V(\alpha)$且 $u \in V(\beta)$)。

也和单主体认知逻辑类似，赋值 V 由赋值在全体命题上的值所确定，所以构造一个赋值只需对每个命题变项p，构造$V(p)$就行了。另一方面，任给全体命题变项的集合 **P** 到 $W \cup \{o\}$ 的幂集 $P(W \cup \{o\})$的映射，都可以扩充为 K 上赋值 V。

11.2.3 定义 满足 $K = \langle o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n \rangle$ 是框架。

(1) V 是 K 上赋值，$M = \langle K, V \rangle$是模型。$M \models \alpha$ 当且仅当 $o \in V(\alpha)$。

(2) $K \models \alpha$ 当且仅当 任给 K 上赋值，都有$\langle K, V \rangle \models \alpha$。

所以 $K \not\models \alpha$ 当且仅当 存在 K 上赋值 V，使得$\langle K, V \rangle \models \alpha$，也就是存在 K 上赋值 V，使得 $o \notin V(\alpha)$。

$K = \langle o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n \rangle$ 是框架，任给 $1 \le i \le n$，可以构造单主体认知逻辑的框架$K_i = \langle o, W, U_i, R_i \rangle$，它是单主体认知逻辑语言$L_i$的框架，称为K的相应的$L_i$-框架。

$M = \langle K, V \rangle$ 是模型，则V是K上赋值，但V也是K_i上赋值，为了区别起见，将其记为V_i，所以$M_i = \langle K_i, V_i \rangle$ 是语言L_i的模型，称为模型M的相应的L_i-模型。

11.2.4 定理 K 是框架。

(1) 任给K上赋值V，任给 $1 \le i \le n$，任给i-公式 α，都有$V_i(\alpha) = V(\alpha)$。

(2) 任给 K 上赋值 V，任给 $1 \le i \le n$，任给 i-公式 α，都有

$\langle K_i, V_i \rangle \models \alpha$ 当且仅当 $\langle K, V \rangle \models \alpha$。

(3) 任给 $1 \le i \le n$，任给i-公式 α，都有$K_i \models \alpha$ 当且仅当 $K \models \alpha$。■

11.2.5 定理 K 是框架。

(1) 任给K上赋值V，任给 $1 \le i, j \le n$，任给纯客观公式α，都有$V_i(\alpha) = V_j(\alpha)$。

(2) 任给 K 上赋值 V，任给 $1 \le i, j \le n$，任给纯客观公式α，都有

$\langle K_i, V_i \rangle \models \alpha$ 当且仅当 $\langle K_j, V_j \rangle \models \alpha$。

(3) 任给 $1 \le i, j \le n$，任给纯客观公式α，都有$K_i \models \alpha$ 当且仅当 $K_j \models \alpha$。■

模态逻辑的可能世界语义学中的一些重要结果在多主体认知逻辑的语义学中还是成立的。

11.2.6 定理 K 是框架。

(1) 如果 α 是重言式的代入，则 $K \models \alpha$。

(2) $K \models B_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(B_i\alpha\rightarrow B_i\beta)$。

(3) 如果 $K \models \alpha$ 且 $K \models \alpha\rightarrow\beta$，则 $K \models \beta$。

证 (1) (3) 显然。

(2) $B_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(B_i\alpha\rightarrow B_i\beta)$是i-公式，所以

$K_i \models B_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(B_i\alpha\rightarrow B_i\beta)$，

由定理 11.2.4 得$K \models B_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(B_i\alpha\rightarrow B_i\beta)$。■

认知可能世界可以模拟成现实世界。

11.2.7 定义 模拟 $K = <o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n>$ 是框架。任给$w\in W$，框架

$K(w) = <o, W, U_1(w),\cdots, U_n(w), R_1,\cdots, R_n>$

称为 w 的模拟框架。

V 是 K 上赋值，构造 K(w)上的赋值 V(w)如下：任给命题变项 p，都有

$o\in V(w)(p)$ 当且仅当 $w\in V(p)$。

任给 $u\in W$，$u\in V(w)(p)$ 当且仅当 $u\in V(p)$，

V(w) 称为w的模拟赋值。$M(w_i) = <K(w), V(w)>$ 称为w的模拟模型。

11.2.8 引理 $K = <o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n>$是框架，任给 $1\le i\le n$，任给$w\in U_i$，任给i-公式 α，都有：

(1) 任给 $u\in W$，都有 $u\in V(w)(\alpha)$ 当且仅当 $u\in V(\alpha)$。

(2) $o\in V(w)(\alpha)$ 当且仅当 $w\in V(\alpha)$。

证 (1) 显然。

(2) 对 i-公式归纳证明。

1. α 是命题变项，由定义直接可得。

2. $\alpha = \neg\beta$，则 $o\in V(w_i)(\alpha)$ 当且仅当 $o\in V(w)(\neg\beta)$

当且仅当 $o \notin V(w)(\beta)$ 当且仅当 $w \notin V(\beta)$

当且仅当 $w \in V(\neg\beta)$ 当且仅当 $w \in V(\alpha)$。

3. $\alpha = \beta \to \gamma$，则 $o \in V(w)(\alpha)$ 当且仅当 $o \in V(w)(\beta \to \gamma)$

当且仅当 $o \notin V(w)(\beta)$或 $o \in V(w)(\gamma)$

当且仅当 $w \notin V(\beta)$或 $w \in V(\gamma)$

当且仅当 $w \in V(\beta \to \gamma)$ 当且仅当 $w \in V(\alpha)$。

4. $\alpha = B_i\beta$，则 $o \in V(w)(\alpha)$ 当且仅当$o \in V(w)(B_i\beta)$

当且仅当 任给 $u \in U(w)$，都有 $u \in V(w)(\beta)$

当且仅当 任给wR_iu，都有$u \in V(\beta)$

当且仅当$w_i \in V(B_i\beta)$ 当且仅当$w \in V(\alpha)$。■

任给 $K(w)$上赋值 V'，任给 $1 \le i \le n$，存在 K 上赋值 V，使得 $V(w) = V'$，所以任给 $1 \le i \le n$，$K(w)$ 上的赋值都可以表示为 $V(w)$，其中 V 是 K 上的赋值。

11.2.9 定理 $K = <o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n>$ 是框架，则任给 $1 \le i \le n$，都有$K \models B_i\alpha$ 当且仅当 任给$w \in U_i$，都有$K(w) \models \alpha$。

证 设$K \models B_i\alpha$，则任给K上赋值V，都有$o \in V(B_i\alpha)$，所以任给$w \in U_i$，都有$w \in V(\alpha)$。

任给$w \in U_i$，任给$K(w)$上赋值$V(w)$，由$w \in V(\alpha)$ 得$o \in V(w)(\alpha)$。所以$K(w) \models \alpha$。

设任给$w \in U_i$，都有$K(w) \models \alpha$，则任给$w \in U_i$，任给$K(w)$上赋值$V(w)$，都有$o \in V(w)(\alpha)$。任给K上赋值V，任给$w \in U_i$，由$o \in V(w)(\alpha)$ 得$w \in V(\alpha)$。所以$o \in V(B_i\alpha)$，因此$K \models B_i\alpha$。■

11.2.10 定义 封闭框架类 Γ 是框架类，如果任给$K \in \Gamma$，任给$w \in U_1 \cup \cdots \cup U_n$，都有$K(w) \in \Gamma$，则称 Γ 是封闭的框架类，简称 Γ 是封闭的。

B是单主体认知逻辑，确定B-有效性的框架称为B-框架。如B_D-框架就是持续框架，B_{D+T}-框架就是非空自返框架，B_{4+}-框架就是闭的传递框架，等等。

11.2.11 定义 $K = <o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n>$是框架。任给 $1 \le i \le n$，令$K_i = <o, W, U_i, R_i>$，$B_1, \cdots, B_n$是n个单主体认知逻辑，如果任给 $1 \le i \le n$，K_i是B_i-框架，则称K是$(B_1, \cdots, B_n)$-

框架。全体$(B_1,\cdots,B_n)$-框架组成的框架类称为$(B_1,\cdots,B_n)$-框架类。

11.2.12 定理 任给n个单主体认知逻辑$B_1,\cdots,B_n$，$(B_1,\cdots,B_n)$-框架类是封闭。■

11.2.13 定理 Γ是封闭的框架类。如果任给$K\in\Gamma$，都有$K\models\alpha$，则任给$K\in\Gamma$，都有$K\models B_i\alpha$。

证 任给$w\in U_i$，由Γ的封闭性得$K(w)\in\Gamma$，由条件得$K(w)\models\alpha$，由定理11.2.9得$K\models B_i\alpha$。■

和单主体认知逻辑类似，多主体认知逻辑的有效性也只对封闭的框架类定义。

11.2.14 定义 有效 Γ是封闭框架类。如果任给$K\in\Gamma$，都有$K\models\alpha$，则称α是Γ有效的。

11.2.15 定理 Γ是封闭框架类。

(1) 重言式的代入是Γ有效的。

(2) 如果α和$\alpha\to\beta$是Γ有效的，则β是Γ有效的。

(3) 如果α是Γ有效的，则$B_i\alpha$是Γ有效的。

证 (1) (2) 见定理11.2.6。

(3) 见定理11.2.13。■

11.2.16 定理 $B_1,\cdots,B_n$是单主体认知逻辑，Γ是$(B_1,\cdots,B_n)$-框架类。则任给$1\le i\le n$，B_i公理是Γ有效的。

证 任给$K\in\Gamma$，任给$1\le i\le n$，如果α是B_i公理，则$K_i\models B_i\alpha$，由定理11.2.4得$K\models B_i\alpha$。■

§11.3 基本系统

由单主体逻辑系统复合成的多主体逻辑系统称为基本多主体逻辑系统，简称基本系统。

$B_1,\cdots, B_n$是n个单主体认知逻辑，基本系统$B = (B_1,\cdots, B_n)$ 由以下公理和推演规则组成：

一、公理

(0)重言式公理　重言式的代入。

(1) B_1的公理。

⋮

(n) B_n的公理。

二、推演规则

(1) 分离规则　从 $\alpha, \alpha\to\beta$ 得到 β。

(2) 认知规则　从 α 得到$B_i\alpha$。

如果$B_1,\cdots, B_n$是极小系统，则称$B = (B_1,\cdots, B_n)$为极小基本系统。

证明和内定理的定义类似于单主体认知逻辑。

11.3.1 定义　证明序列　$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是有限公式序列，如果 α_i $(1\le i\le n)$满足以下条件之一：

(1) α_i是公理；

(2) α_i是由 α_i之前的公式通过分离规则得到的；

(3) α_i是由 α_i之前的公式通过认知规则得到的。

则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是证明序列，简称证明。

11.3.2 定义　内定理　α 是公式。如果存在证明序列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得 $\alpha=\alpha_n$，则称 α 是内定理，记为 $\vdash\alpha$。$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，称为 α 的证明序列。

证明可以简化。有两个常用的简化方法

(1) 已证的内定理可以像公理一样使用。

(2) 已证的导出 (推演) 规则可以像推演规则一样使用。

参考极小系统的证明，可以证明极小基本系统有以下的导出规则和内定理。(从而任何基本系统都有这些推演规则和内定理)。

11.3.3 定理

(1) 所有古典命题逻辑内定理的代入是内定理。

(2) 合取分配律 $\vdash \mathrm{B}(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow \mathrm{B}\alpha\wedge \mathrm{B}\beta$。

(3) 析取律 $\vdash \mathrm{B}\alpha\vee \mathrm{B}\beta\rightarrow \mathrm{B}(\alpha\vee\beta)$。■

11.3.4 定理

(1) 所有古典命题逻辑的导出规则都是导出规则。

(2) 认知蕴涵规则 如果 $\vdash\alpha\rightarrow\beta$，则 $\vdash \mathrm{B}_i\alpha\rightarrow \mathrm{B}_i\beta$。

(3) 认知分离规则 如果 $\vdash \mathrm{B}_i\alpha$ 且 $\vdash \mathrm{B}_i(\alpha\rightarrow\beta)$，则 $\vdash \mathrm{B}_i\beta$。

(4) 认知等值律 如果 $\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$，则 $\vdash \mathrm{B}_i\alpha\leftrightarrow \mathrm{B}_i\beta$。

(5) 基本置换定理 如果 $\vdash\psi\leftrightarrow\varphi$，则 $\vdash\alpha\leftrightarrow\alpha[\psi/\varphi]$。

(6) 认知合取规则 如果 $\vdash \mathrm{B}(\alpha\wedge\beta)$，则 $\vdash \mathrm{B}\alpha\wedge \mathrm{B}\beta$。

(7) 认知析取规则 如果 $\vdash \mathrm{B}\alpha\vee \mathrm{B}\beta$，则 $\vdash \mathrm{B}(\alpha\vee\beta)$。■

可以用和单主体认知逻辑同样的方法将证明推广为推演。

11.3.5 定义 推演 A是公式集。如果存在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in A$，使得$\vdash\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\rightarrow\alpha$，则称$A$推出 α，记为$A\vdash\alpha$。在推演$A\vdash\alpha$ 中，A称为前提集，α 称为A的推论。

同样有以下基本性质。

11.3.6 定理

(1) 单调性 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\vdash\alpha$，则 $B\vdash\alpha$。特别地，如果 $\vdash\alpha$，则任给公式集 B，都有 $B\vdash\alpha$。

(2) 有限性 如果 $A\vdash\alpha$，则存在 A 的有限子集 B，使得 $B\vdash\alpha$。

(3) 传递性 如果$A\vdash\alpha_1,\cdots,A\vdash\alpha_n$，且$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\vdash\alpha$，则$A\vdash\alpha$。

(4) 演绎定理 $A\cup\{\alpha\}\vdash\beta$当且仅当 $A\vdash\alpha\rightarrow\beta$。

(5) 切割定理 如果 $A\cup\{\alpha\}\vdash\beta$且 $A\vdash\alpha$，则 $A\vdash\beta$。

(6) 分情况证明规则 如果 $A\cup\{\alpha\}\vdash\gamma$且 $A\cup\{\beta\}\vdash\gamma$，则 $A\cup\{\alpha\vee\beta\}\vdash\gamma$。

(7) 二难推理规则 如果 $A\cup\{\alpha\}\vdash\gamma$且 $A\cup\{\neg\alpha\}\vdash\gamma$，则 $A\vdash\gamma$。■

$\mathrm{B} = (\mathrm{B}_1,\cdots,\mathrm{B}_n)$，全体$(\mathrm{B}_1,\cdots,\mathrm{B}_n)$-框架类所确定的有效性称为B-有效性。

基本系统 B 对于 B-有效性有可靠性和完全性。

11.3.7 引理 基本系统 B 的公理是 B-有效的。

证 公理 0 见定理 1.2.15(1)。任给 $1 \le i \le n$，公理 i 见定理 1.2.16。■

11.3.8 引理 基本系统 B 的推演规则保持 B-有效性不变。

证 见定理 1.2.15(2)(3)。■

11.3.9 定理 可靠性定理 如果 $\vdash \alpha$，则 α 是 B-有效的。

证 设 α 的证明序列是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$，归纳证明任给 $1 \le i \le k$，α_i都是B-有效的。具体证明可参考极小逻辑可靠性定理的证明。■

和谐、极大和谐的定义同单主体认知逻辑，它们也有类似的性质。

11.3.10 定理 A 是和谐集，则

(1) A 是不和谐的 当且仅当 任给公式β，都有 $A \vdash \beta$。

(2) A 是和谐的 当且仅当 A 的每个有限子集是和谐的。

(3) $A \cup \{\neg\alpha\}$是和谐的 当且仅当 $A \nvdash \alpha$。

(4) $A \cup \{\alpha\}$是和谐的 当且仅当 $A \nvdash \neg\alpha$。■

11.3.11 定理 A 是极大和谐集，则

(1) 推演封闭性 A 是推演封闭的，即任给公式 α，都有如果 $A \vdash \alpha$，则 $\alpha \in A$。

(2) $\neg\alpha \in A$ 当且仅当 $\alpha \notin A$。

(3) $\alpha \rightarrow \beta \in A$ 当且仅当 $\alpha \notin A$ 或 $\beta \in A$。■

11.3.12 定理 任何和谐的公式集可以扩充为极大和谐的公式集。■

B是公式集，任给 $1 \le i \le n$，令$B^{-i} = \{\alpha \mid \mathrm{B_i}\alpha \in B\}$。

11.3.13 定理 B是极大和谐集，如果$\mathrm{B_i}\alpha \notin B$，则存在极大和谐集$A$，使得$B^{-i} \subseteq A$且$\alpha \notin A$。

证 先用反证法证$B^{-i} \cup \{\neg\alpha\}$和谐。设$B^{-i} \cup \{\neg\alpha\}$不和谐，则$B^{-i} \vdash \alpha$，所以

存在$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in B^{-i}$，使得 $\vdash \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha$，

所以

$\vdash B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_k\rightarrow B_i\alpha$，

所以

存在$B_i\alpha_1,\cdots, B_i\alpha_k\in B$，使得 $\vdash B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_k\rightarrow B_i\alpha$，

所以$B\vdash B_i\alpha$，因此$B_i\alpha\notin B$，矛盾。

将$B^{-i}\cup\{\neg\alpha\}$扩充为极大和谐集A，就有$B^{-i}\subseteq A$且$\neg\alpha\in A$，因此$B^{-i}\subseteq A$且$\alpha\notin A$。■

11.3.14 定义 典范框架和典范模型 $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_1,\cdots, \mathrm{B}_n)$ 是基本系统，A是极大和谐集。令：

(1) $W = \{u \mid u$ 是极大和谐集$\}$；

(2) 任给 $1\leq i\leq n$，R_i是W上的二元关系，满足：uR_iv 当且仅当 $u^{-i}\subseteq v$；

(3) $U_i = R_i(A) = \{u \mid AR_iu\}$；

(4) $o\notin W$，

则$K(A) = <o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n>$是框架，称为B的相对于$A$的典范框架。

在 B 的相对于 A 的典范框架 $K(A)$ 取 $V(A)$ 如下：

任给 $u\in W$，$u\in V(A)(p)$ 当且仅当 $p\in u$，

$o\in V(A)(p)$ 当且仅当 $p\in A$，

则称 $V(A)$是 $K(A)$上的典范赋值，称 $M(A) = <K(A), V(A)>$是 B 的相对于 A 的典范模型。

11.3.15 定理 $M(A) = <K(A), V(A)>$ 是 B 的相对于 A 的典范模型，则任给公式 α，都有

(1) 任给 $u\in W$，$u\in V(A)(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha\in u$。

(2) $o\in V(A)(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha\in A$。

证 (1) 任给 $u\in W$，对α作归纳。

1. α是命题变项，由定义直接可得。

2 $\alpha = \neg\beta$，则

$u\in V(A)(\alpha)$ 当且仅当 $u\in V(A)(\neg\beta)$ 当且仅当 $u\notin V(A)(\beta)$

当且仅当 $\beta\notin u$ 当且仅当 $\neg\beta\in u$

当且仅当 $\alpha\in u$。

3. $\alpha=\beta\to\gamma$，则

u$\in$V(A)(α) 当且仅当 u$\in$V(A)($\beta\to\gamma$)

当且仅当 u$\notin$V(A)(β)或 u$\in$V(A)(γ)

当且仅当 $\beta\notin$u 或$\gamma\in$u 当且仅当 $\beta\to\gamma\in$u

当且仅当 $\alpha\in$u。

3. α = B$_i\beta$，则

如果u$\in$V(A)(α)，则u$\in$V(A)(B$_i\beta$)，所以

任给uR$_i$v，都有v$\in$V(A)(β)，

所以

任给$u^{-i}\subseteq v$，都有$\beta\in$v，

由定理 11.3.14 得B$_i\beta\in$u，因此$\alpha\in$u。

如果$\alpha\in$u，则B$_i\beta\in$u，所以$\beta\in u^{-i}$，所以

任给$u^{-i}\subseteq v$，都有$\beta\in$v，

所以

任给uR$_i$v，都有v$\in$V(A)(β)，

所以u$\in$V(A)(B$_i\beta$)，因此u$\in$V(A)(α)。

(2) 对 α 作归纳。

1. α是命题变项，由定义直接可得。

2 $\alpha=\neg\beta$，则

o$\in$V(A)(α) 当且仅当 o$\in$V(A)($\neg\beta$) 当且仅当 o$\notin$V(A)(β)

当且仅当 $\beta\notin A$ 当且仅当 $\neg\beta\in A$

当且仅当 $\alpha\in A$。

3. $\alpha=\beta\to\gamma$，则

o$\in$V(A)(α) 当且仅当 o$\in$V(A)($\beta\to\gamma$)

当且仅当 o$\notin$V(A)(β)或 o$\in$V(A)(γ)

当且仅当 $\beta\notin A$ 或$\gamma\in A$ 当且仅当 $\beta\to\gamma\in A$

当且仅当 $\alpha\in A$。

3. α = B$_i\beta$，则

如果$o \in V(A)(\alpha)$，则$o \in V(A)(B_i\beta)$，所以

任给 $u \in U$，都有 $v \in V(A)(\beta)$，

所以

任给AR_iu，都有$u \in V(A)(\beta)$，

所以

任给$A^{-i} \subseteq u$，都有 $\beta \in u$，

由定理 11.3.14 得 $B_i\beta \in A$，因此$\alpha \in A$。

如果$\alpha \in A$，则$B_i\beta \in A$，所以 $\beta \in A^{-i}$，所以

任给$A^{-i} \subseteq u$，都有 $\beta \in u$，

所以

任给AR_iu，都有 $\beta \in u$，

所以

任给 $u \in U$，都有 $u \in V(A)(\beta)$，

所以，$o \in V(A)(B_i\beta)$，因此$o \in V(A)(\alpha)$。■

11.3.16 定理 $M(A) = <K(A), V(A)>$是 B 的相对于 A 的典范模型，则任给 $\alpha \in A$，都有 $M(A) \models \alpha$。

证 任给 $\alpha \in A$，由定理 11.3.15 得 $o \in V(A)(\alpha)$，所以 $M(A) \models \alpha$。■

11.3.17 定理 $B = (B_1, \cdots, B_n)$，$K(A)$是B的相对于A的典范模型，则任给 $1 \leq i \leq n$，$K_i(A)$是B_i的相对于A的典范框架。所以任给 $1 \leq i \leq n$，$K_i(A)$是B_i-框架，因此$K(A)$是B-框架。■

11.3.18 定理 完全性 如果 α 是 B-有效的，则 $\vdash \alpha$。

证 证明如果 $\nvdash \alpha$，则 α 不是 B-有效的。

如果如果 $\nvdash \alpha$，则$\{\neg\alpha\}$和谐，由定理 11.3.12 得存在极大和谐集 A，使得$\neg\alpha \in A$。取 B 的相对于 A 的典范模型 $K(A)$和典范模型 $M(A)$，则 $M(A) \models \neg\alpha$，所以 $M(A) \not\models \alpha$，因此 $K(A) \not\models \alpha$。又因为 $K(A)$是 B-框架，所以 α 不是 B-有效的。■

§11.4 集体认知和民主原则

集体认知指的是集体主体的认知。集体主体是具有一定内部组织关系的复杂的多主体系统。集体主体首先是多主体的群体主体。民主原则的基本要义是少数服从多数。但究竟什么是少数服从多数，又如何实行少数服从多数，有不同层次的具体办法或规定。这就是一定组织关系的体现。一个实行民主原则的多主体系统就是一个集体主体。从研究的角度看，可以对此分层，首先考虑简单群体主体，在此基础上，通过加入民主原则而形成一个集体主体。正是出于这个思路，前面首先建立了基本多主体认知逻辑系统，下面在这个系统的基础上讨论集体认知。本节讨论关于实行民主原则的集体主体的集体认知。

在基本系统$B = (B_1,\cdots, B_n)$ 中，$B_i\alpha$是i-公式，$B_j\alpha$ 是j-公式，如果$i \neq j$，则 α 是纯客观公式，所以在基本系统中，集体认知的对象只能是纯客观公式。

因此，单主体认知逻辑系统的主观公理**D**, **T**, **4** 在讨论集体认知中根本不起作用，客观公理 $\mathbf{4}^+$也不起作用。这样，在讨论集体认知时用的单主体认知逻辑系统只能是极小系统B_0和客观无矛盾系统B_{D+}。

特别地，令$B^0 = (B_0,\cdots, B_0)$和$B^D = (B_{D+},\cdots, B_{D+})$，将$B^D$中的 $\vdash$记为 $\vdash^D$。

另外，对于框架K来说，关系R_i不起作用，所以框架可以表示为 $\langle o, W, U_1,\cdots, U_n\rangle$

11.4.1 定义 广义交和广义并 A 是有限公式集。定义$\wedge A$ 是 A 中所有公式的交，定义$\vee A$ 是 A 中所有公式的并。

如果 $\pi \subseteq \{1,\cdots, n\}$且$|\pi| = k$，则称 π 为 k-子集。

11.4.2 定义 集体认知 α 是纯客观公式。

(1) π 是$\{1,\cdots, n\}$的子集，$B_\pi\alpha = \wedge\{B_i\alpha \mid i\in\pi\}$，称为 π 认知 α。

(2) $1\le k\le n$，$B^{(k)}\alpha = \vee\{B_\pi\alpha \mid \pi$是k-子集$\}$，称为至少k个主体认知 α。

$B_\pi\alpha$ 是合取式，$B^{(k)}\alpha$ 是析取式，由合取和析取的性质和假言移位就能得到：

11.4.3 定理

(1) 如果$i\in\pi$，则 $\vdash^D B_\pi\alpha\to B_i\alpha$且 $\vdash^D \neg B_i\alpha\to\neg B_\pi\alpha$。

(2) 如果 π 是k-子集，则$\vdash^D B_\pi\alpha\to B^{(k)}\alpha$且 $\vdash^D \neg B^{(k)}\alpha\to\neg B_\pi\alpha$。

如果 s≤k，则任意 s-子集总包含在某个 k-子集中，所以有：

11.4.4 定理

(1) 如果 $\tau\subseteq\pi$，则 $\vdash^{D} B_{\pi}\alpha\rightarrow B_{\tau}\alpha$。

(2) 如果s≤k，则 $\vdash^{D} B^{(k)}\alpha\rightarrow B^{(s)}\alpha$。■

$\neg B^{(k)}\alpha=\neg\vee\{B_{\pi}\alpha\mid\pi$是k-子集$\}$，所以$\neg B^{(k)}\alpha$ 逻辑等价于$\wedge\{\neg B_{\pi}\alpha\mid\pi$是k-子集$\}$。

$B^{(k)}\alpha\wedge B^{(k)}\beta=(\vee\{B_{\pi}\alpha\mid\pi$是k-子集$\})\wedge(\vee\{B_{\tau}\beta\mid\tau$是k-子集$\})$

所以$B^{(k)}\alpha\wedge B^{(k)}\beta$逻辑等价于$\vee\{B_{\pi}\alpha\wedge B_{\tau}\alpha\mid\pi,\tau$是k-子集$\}$。更一般地有，$B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_{m-1}$逻辑等价于

$\vee\{B_{\pi 1}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_{\pi m-1}\alpha_{m-1}\mid\pi_1,\cdots,\pi_{m-1}$是k-子集$\}$。

$\neg B^{(k)}\alpha$ 逻辑等价于合取式，$B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_{m-1}$逻辑等价于析取式，由后件合取和前件析取规则得：

11.4.5 定理

(1) 如果任给k-子集π，都有 $\vdash^{D}\beta\rightarrow\neg B_{\pi}\alpha$，则

$\vdash^{D}\beta\rightarrow\neg B^{(k)}\alpha$。

(2) 如果任给k-子集$\pi_1,\cdots,\pi_{m-1}$，都有

$\vdash^{D} B_{\pi 1}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_{\pi m-1}\alpha_{m-1}\rightarrow\beta$，

则 $\vdash^{D} B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_{m-1}\rightarrow\beta$。■

集体认知于单个认知主体的认知有许多不同之处。

在B^{D}中，任给不一致的公式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，任给 1≤i≤n，因为$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m$是矛盾式，所以$\vdash^{D}\neg B_i(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m)$。由合取分配原则，$\neg B_i(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m)$等值于$\neg(B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_m)$，再由定义置换，$\neg(B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_m)$ 等值于$B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B_i\alpha_m$。

因此在在B^{D}中有：

11.4.6 定理 如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是不一致的，则 $\vdash^{D} B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B_i\alpha_m$。■

但对于$B^{(k)}$来说，类似的性质在一定的条件下才成立。

11.4.7 引理 如果$k/n>m-1/m$，则任给m个k-子集 $\pi_1,\cdots,\pi_m$，都存在i，使得$i\in\pi_1,\cdots, i\in\pi_m$。■

11.4.8 定理 弱一致性 如果$k/n>m-1/m$，则任给m个不一致的公式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，都有$\vdash^D\neg(B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_m)$。

证 证明 $\vdash^D B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B^{(k)}\alpha_m$。

任给k-子集 $\pi_1,\cdots,\pi_{m-1}$，任给k-子集 π，由引理 11.4.7 得

存在i，使得$i\in\pi_1,\cdots, i\in\pi_{m-1}$且$i\in\pi$，

由定理 11.4.6 得

$$\vdash^D B_i\alpha_1\wedge\cdots\wedge B_i\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B_i\alpha_m,$$

由定理 11.4.3(1)和三段论得

$$\vdash^D B_{\pi1}\alpha_1\wedge B_{\pi m-1}\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B_\pi\alpha_m,$$

由任给k-子集π，都有 $\vdash^D B_{\pi1}\alpha_1\wedge B_{\pi m-1}\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B_\pi\alpha_m$和定理 11.4.5(1)得

$$\vdash^D B_{\pi1}\alpha_1\wedge B_{\pi m-1}\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B^{(k)}\alpha_m,$$

由任给k-子集$\pi_1,\cdots,\pi_{m-1}$，都有 $\vdash^D B_{\pi1}\alpha_1\wedge B_{\pi m-1}\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B^{(k)}\alpha_m$和定理 11.4.5(2)得

$$\vdash^D B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_{m-1}\rightarrow\neg B^{(k)}\alpha_m。■$$

$k/n>m-1/m$是一致性成立的必要条件，如果$k/n\leq m-1/m$，就不能有 $\vdash^D\neg(B^{(k)}\alpha_1\wedge\cdots\wedge B^{(k)}\alpha_m)$。

11.4.9 定义 独立 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是m个纯客观公式。如果其中任何m-1 个公式和另一个公式的否定的一致的，则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的。

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的，当且仅当，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是不一致的，且其中任何m-1 个公式都是一致的。

如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的，则任给 $1\leq j\leq m$，任给$u\in W$，存在赋值V，使得$u\notin V(\alpha_j)$ 且任给$i\neq j$，都有$u\in V(\alpha_i)$，V称为(u, j)-赋值。如果存在 $1\leq j\leq m$，使得V是(u, j)-赋值，则称V为u-赋值。

对于纯客观公式来说，赋值对于不同的可能世界的独立的，所以如果V_1，V_2是赋值，$u\neq v$，则存在V，使得在u上V和V_1的表现是一样的，在v上V和V_2的表现是一样的，即，任

给公式α，$u\in V(\alpha)$ 当且仅当$u\in V_1(\alpha)$，$v\in V(\alpha)$ 当且仅当$v\in V_2(\alpha)$。

任给$u \neq v$，V_1是u-赋值，V_2是v-赋值，则存在赋值V，使得V既是u-赋值，又是v-赋值。

最终，存在赋值V，使得任给$u\in W$，V都是u-赋值，V称为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值。V是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值的条件是：任给$u\in W$，存在 $1\leq j\leq m$，，使得$u\notin V(\alpha_j)$ 且任给$i \neq j$，都有$u\in V(\alpha_i)$。

我们考虑一个特殊的B^D-框架$K = <o, W, U_1,\cdots, U_n>$，其中$W = \{u_1,\cdots, u_n\}$，$U_1 = \{u_1\},\cdots, U_n= \{u_n\}$，$u_1,\cdots, u_n$两两不同。

赋值V在公式$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$上的表现可以用以下表格直观地表示出来：

V	α_1	$\cdots$	α_j	$\cdots$	α_m
u_1	t_{11}	$\cdots$	t_{1j}	$\cdots$	t_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
u_i	t_{i1}	$\cdots$	t_{ij}	$\cdots$	t_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
u_n	t_{n1}	$\cdots$	t_{nj}	$\cdots$	t_{nm}

其中，t_{ij}是 0 或 1，$t_{ij} = 1$ 当且仅当$u_i\in V(\alpha_j)$。

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的。如果V是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值，则每一行中恰有一个 0，反之，满足每一行中恰有一个 0 的任何t_{ij}的取值，都有相应的特征赋值。

如果V是$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值，则每一行中恰有m-1 个 1，所以表中恰有n(m-1)个 1。适当调整每一行中 0 的位置，使得每一列中 1 的个数尽量接近，最多相差 1。调整后每一列中 1 的个数≥n(m-1)/m的整数部分[n(m-1)/m]，也就是>(n(m-1)/m)-1。

注意，任何调整都保持每一行中恰有一个 0，所以总是有相应的特征赋值。另外，j列中 1 的个数就是集合$\{s \mid u_s\in V(\alpha_j)\}$的原元素个数 $|\{s \mid u_s\in V(\alpha_j)\}|$。因此有：

11.4.10 引理 如果是 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$是独立的，则存在 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$的特征赋值V，使得任给$1\leq j\leq m$，都有 $|\{s \mid u_s\in V(\alpha_j)\}|>(n(m-1)/m)-1$。■

在这个特殊的框架上，$o\in V(B_i\alpha_j)$当且仅当$u_i\in V(\alpha_j)$当且仅当$i\in\{s \mid u_s\in V(\alpha_j)\}$，所以有：

11.4.11 引理 $o\in V(B_\pi\alpha_j)$ 当且仅当 $\pi \subseteq \{s \mid u_s\in V(\alpha_j)\}$。■

11.4.12 定理　如果$k/n \leq m-1/m$，则存在B^{D}-框架K，使得任给独立的公式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，都存在K上赋值V，使得 $<K, V> \models B^{(k)}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge B^{(k)}\alpha_m$。

证　取B^{D}-框架$K = <o, W, U_1,\cdots, U_n>$，其中$W = \{u_1,\cdots, u_n\}$，$U_1 = \{u_1\},\cdots, U_n = \{u_n\}$，$u_1,\cdots, u_n$两两不同。

由引理 11.4.7 得存在赋值 V，使得任给 $1 \leq j \leq m$，都有

$|\{s \mid u_s \in V(\alpha_j)\}| > (n(m-1)/m)-1 \geq (nk/n)-1 \geq k-1$，

所以任给 $1 \leq j \leq m$，都有 $|\{s \mid u_s \in V(\alpha_j)\}| \geq k$，

任给 $1 \leq j \leq m$，取k-子集$\pi \subseteq \{s \mid u_s \in V(\alpha_j)\}$，由引理 11.4.8 得$o \in V(B_\pi\alpha_j)$，所以$o \in V(B^{(k)}\alpha_j)$。因此$o \in V(B^{(k)}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge B^{(k)}\alpha_m)$，即 $<K, V> \models B^{(k)}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge B^{(k)}\alpha_m$。■

11.4.13 推论　如果$k/n \leq m-1/m$，则任给独立的公式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，都有：

(1) 存在B^{D}-框架K，使得$K \not\models \neg(B^{(k)}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge B^{(k)}\alpha_m)$。

(2) $\not\models^{D} \neg(B^{(k)}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge B^{(k)}\alpha_m)$。■

以下讨论集体认知和个体认知的关系。

最主要的是少数服从多数的民主原则，也就是每个人服从多数的原则。

k是多数的意思是$k/n > 1/2$，这时每个人服从多数的原则就表示为：任给 $1 \leq i \leq n$，任给公式 α，都有$B^{(k)}\alpha \rightarrow B_i\alpha$。

取掉 $k/n > 1/2$ 的限制，任给 $1 \leq k \leq n$，我们定义 k-原则如下：

任给公式 α，任给 $1 \leq i \leq n$，都有$B^{(k)}\alpha \rightarrow B_i\alpha$。

因为$B^{(n)}\alpha = B_1\alpha \wedge \cdots \wedge B_n\alpha$，所以n原则是重言式。因此以下讨论k-原则时，都假设$k < n$。当然，有些结果对$k = n$也成立。

在B^{D}上加上k-原则公理：$B^{(k)}\alpha \rightarrow B_i\alpha$，$1 \leq i \leq n$，得到的多主体认知逻辑系统称为k-系统，记为$\mathsf{B}^{(k)}$，$\mathsf{B}^{(k)}$中的 $\vdash$记为 $\vdash^{(k)}$。

以下讨论$\mathsf{B}^{(k)}$的系统性质。首先需要定义$\mathsf{B}^{(k)}$-框架和$\mathsf{B}^{(k)}$-有效性。

11.4.14 定义　k-性质和 k-框架

(1) $K = <o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n>$ 是框架。如果任给k-子集π，任给 $1 \leq i \leq n$，都有$U_i \subseteq$

$\bigcup\{U_s \mid s\in\pi\}$，则称K有k-性质。

(2) Γ 是 K 生成的封闭框架类。如果 Γ 中的每个框架都有 k-性质，则称 K 是 k-框架。

非空的持续的k-框架称为$B^{(k)}$-框架。$B^{(k)}$-框架是存在的。任给 $1\le i\le n$，取$U_i = \{a\}$，$R_i = \{\langle a, a\rangle\}$，则K的任何模拟框架都是K本身，所以K生成的封闭框架类是{K}，而K有k-性质，因此K是k-框架。显然K非空的和持续的。

全体$B^{(k)}$-框架确定的有效性称为$B^{(k)}$-有效性。k-系统$B^{(k)}$对于$B^{(k)}$-有效性有可靠性。

11.4.15 引理 k-原则公理是$B^{(k)}$-有效的。

证 任给非空的持续的k-框架K，任给K上赋值V，如果$o\in V(B^{(k)}\alpha)$，则

存在k-子集π，使得$o\in V(B_\pi\alpha)$，

所以

任给$s\in\pi$，都有$o\in V(B_s\alpha)$，

所以

任给$s\in\pi$，都有$U_s \subseteq V(\alpha)$，

所以

$\bigcup\{U_s \mid s\in\pi\} \subseteq V(\alpha)$，

任给 $1\le i\le n$，由$U_i \subseteq \bigcup\{U_s \mid s\in\pi\}$得

$U_i \subseteq V(\alpha)$，所以$o\in V(B_i\alpha)$，

因此$o\in V(B^{(k)}\alpha\to B_i\alpha)$。■

11.4.16 定理 可靠性定理 如果 $\vdash^{(k)}\alpha$，则α是$B^{(k)}$-有效的。

证 设 α 的证明序列是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，归纳证明任给 $1\le i\le m$，α_i都是$B^{(k)}$-有效的。具体证明可参考极小逻辑可靠性定理的证明。■

虽然可以和基本性质一样定义和谐、极大和谐、典范框架和典范模型等概念，而且对于典范模型 $M(A) = \langle K(A), V(A)\rangle$也有类似的性质：

(1) 任给 $u\in W$，$u\in V(A)(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha\in u$。

(2) $o \in V(A)(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha \in A$。

(3) 任给 $\alpha \in A$，都有 $M(A) \models \alpha$。

但我们无法证明典范框架K(A)是$B^{(k)}$-框架，所以从典范模型没法得到k-系统$B^{(k)}$对于$B^{(k)}$-有效性有完全性。

如果k-系统$B^{(k)}$对于$B^{(k)}$-有效性有完全性，则有两种方法可供选择。一是进一步分析极大和谐集的性质，证明典范框架K(A)是$B^{(k)}$-框架；二是将广义模态逻辑中证明完全性的其它方法移植到$B^{(k)}$中。

如果k-系统$B^{(k)}$对于$B^{(k)}$-有效性没有完全性，则有两种修改的方法可供选择。一是进一步分析极大和谐集的性质，证明典范框架K(A) 是$B^{(k)}$-框架；二是将广义模态逻辑中证明完全性的其它方法移植到$B^{(k)}$中。

k-原则是说个人服从至少k个人的意见，而弱k-原则是说个人不反对至少k个人的意见。形式表示为：任给 $1 \le i \le n$，任给公式α，都有$B^{(k)}\alpha \rightarrow \neg B_i \neg \alpha$。

在B^D上加上弱k-原则公理：$B^{(k)}\alpha \rightarrow \neg B_i \neg \alpha$，$1 \le i \le n$，得到的多主体认知逻辑系统称为弱k-系统，记为$B^{(k*)}$，$B^{(k*)}$中的 $\vdash$ 记为 $\vdash^{(k*)}$。

以下讨论$B^{(k*)}$的系统性质。首先需要定义$B^{(k*)}$-框架和$B^{(k*)}$-有效性。

11.4.17 定义　弱 k-性质和弱 k-框架

(1) $K = \langle o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n \rangle$是框架。如果任给k-子集$\pi$，任给 $1 \le i \le n$，都有$U_i \cap \bigcup\{U_s \mid s \in \pi\} \neq \varnothing$，则称K有弱k-性质。

(2) Γ 是K生成的封闭框架类。如果 Γ 中的每个框架都有弱k-性质，则称K是弱k-框架。非空持续的弱k-框架称为$B^{(k*)}$-框架。

如果任给 $1 \le i \le n$，都有U_i都是非空的，则从$U_i \subseteq \bigcup\{U_s \mid s \in \pi\}$能得到$U_i \cap \bigcup\{U_s \mid s \in \pi\} \neq \varnothing$，因此任何$B^{(k)}$-框架都是$B^{(k*)}$-框架。

不是$B^{(k)}$-框架的$B^{(k*)}$-框架是存在的，取$a, b_1, \cdots, b_n$两两不同，任给 $1 \le i \le n$，取$U_i = \{a, b_i\}$，R_i是U_i上的全关系，则K是$B^{(k*)}$-框架但不是$B^{(k)}$-框架。

全体$B^{(k*)}$-框架确定的有效性称为$B^{(k*)}$-有效性。弱k-系统$B^{(k*)}$对于$B^{(k)}$-有效性有可靠性。

11.4.18 引理　弱k-原则公理是$B^{(k*)}$-有效的。

证　任给非空的持续的弱k-框架K，任给K上赋值V，如果$o\in V(B^{(k)}\alpha)$，则

存在k-子集π，使得$o\in V(B_{\pi}\alpha)$，

所以

任给$s\in\pi$，都有$o\in V(B_s\alpha)$，

所以

任给$s\in\pi$，都有$U_s\subseteq V(\alpha)$，

所以

$\bigcup\{U_s \mid s\in\pi\}\subseteq V(\alpha)$，

任给 $1\le i\le n$，由$U_i\cap\bigcup\{U_s \mid s\in\pi\}\neq\varnothing$得

$U_i\cap V(\alpha)\neq\varnothing$，

所以

存在$u\in U_i$，使得$u\notin V(\neg\alpha)$

所以

$o\notin V(B_i\neg\alpha)$，

因此$o\in V(B^{(k)}\alpha\to\neg B_i\neg\alpha)$。■

11.4.18 定理　可靠性定理　如果$\vdash^{(k^*)}\alpha$，则α是$B^{(k^*)}$-有效的。

证　设α的证明序列是$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，归纳证明任给 $1\le i\le m$，α_i都是$B^{(k^*)}$-有效的。具体证明可参考极小逻辑可靠性定理的证明。■

和$B^{(k)}$类似，$B^{(k^*)}$的完全性有待进一步讨论。

§11.5　权威主义

权威也是认知主体，是在认知过程中与其它认知主体有不同性质的认知主体。权威有两种，一种是个人权威，一种是集体权威。首先讨论个人权威。

在一般的多主体认知逻辑的形式语言中加上一个新的(权威的)认知模态算子 A，就得到刻画个人权威的多主体认知逻辑的形式语言。

认知中的权威就是：他的认定也是每个认知主体的认定，所以权威主义原则的形式表示是：任给 $1\leq i\leq n$，任给公式 α，都有$A\alpha\rightarrow B_i\alpha$。

设关于A的单主体认知逻辑是A，在基本系统B = ($B_1,\cdots, B_n$)中，加上A的公理和权威主义原则公理

$$A\alpha\rightarrow B_i\alpha，1\leq i\leq n，$$

得到的系统称为权威主义系统，记为(A, B)。

和讨论集体认知类似，因为在权威主义原则公理$A\alpha\rightarrow B_i\alpha$ 中，α 一定是纯客观公式，所以在权威主义系统(A, B)中，每个B_i是极小系统B_0或客观无矛盾系统B_{D+}，A也只能是极小系统A_0和客观无矛盾系统A_{D+}。

我们还假定除权威外，每个认知主体的性质的一样的，所以B是B^0或B^D，因此我们仅讨论以下四种权威主义系统：

(A_0, B^0), (A_0, B^D), (A_{D+}, B^0) 和 (A_{D+}, B^D)。

注意到权威主义原则公理$A\alpha\rightarrow B_i\alpha$ 和B_i的$\mathbf{D}^+$公理可以推出A的$\mathbf{D}^+$公理，所以 (A_0, B^D) = (A_{D+}, B^D)，因此我们所讨论的权威主义系统实际上只有三种。

虽然A的$\mathbf{D}^+$公理在 (A_{D+}, B^D) 中不独立，但为了表明A的$\mathbf{D}^+$公理在 (A_{D+}, B^D) 成立，此系统记为 (A_{D+}, B^D) 而不记为 (A_0, B^D)。

将 (A_0, B^0), (A_{D+}, B^0) 和 (A_{D+}, B^D) 中的 $\vdash$分别记为 $\vdash^0$，$\vdash^{D,0}$和 $\vdash^D$。

以下讨论 (A, B) 的系统性质，为了加以区别，将相对于 A 的认知世界和认知通达关系分别记为 T 和 S。

11.5.1 定义　权威性质和权威框架

(1) K = <o, W, T, $U_1,\cdots, U_n$, S, $R_1,\cdots, R_n$> 是框架。如果任给 $1\leq i\leq n$，都有$U_i\subseteq T$，则称K有权威性质。

(2) Γ 是 K 生成的封闭框架类。如果 Γ 中的每个框架都有权威性质，则称 K 是权威框架。

11.5.2 定义　(A, B)-框架

$K = \langle o, W, T, U_1, \cdots, U_n, S, R_1, \cdots, R_n \rangle$ 是权威框架，(A, B) 是权威主义系统。

如果 $\langle o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n \rangle$ 是B-框架且 $\langle o, W, T, S \rangle$ 是A-框架，则称K是 (A, B)-框架。全体 (A, B)-框架组成的框架类称为 (A, B)-框架类。

(A_{D+}, B^D)-框架是存在的，取$T = \{a\}$，$S = \{\langle a, a \rangle\}$，任给 $1 \le i \le n$，取$U_i = \{a\}$，$R_i = \{\langle a, a \rangle\}$，则K的任何模拟框架都是K本身，所以K生成的封闭框架类是{K}，而K有权威性质，因此K是权威框架。因为T非空，任给 $1 \le i \le n$，U_i非空，所以然K是 (A_{D+}, B^D)-框架。

注意 (A_{D+}, B^D)-框架也是 (A_0, B^D)-框架和 (A_0, B^0)-框架，所以对于我们所讨论的三种权威主义系统 (A, B) 来说，(A, B)-框架都是存在。

全体 (A, B)-框架确定的有效性称为 (A, B)-有效性。

11.5.3 引理　权威主义公理是 (A, B)-有效的。

证　任给 (A, B)-框架 K，任给 K 上赋值 V，如果 $o \in V(A\alpha)$，则

$T \subseteq V(\alpha)$，

任给 $1 \le i \le n$，由$U_i \subseteq T$得

$U_i \subseteq V(\alpha)$，

所以

$o \in V(B_i\alpha)$，

因此$o \in V(A\alpha \rightarrow B_i\alpha)$。■

11.5.4 定理　可靠性定理

(1) 如果 $\vdash^0 \alpha$，则 α 是 (A_0, B^0)-有效的。

(2) 如果 $\vdash^{0, D} \alpha$，则 α 是 (A_0, B^D)-有效的。

(3) 如果 $\vdash^D \alpha$，则 α 是 (A_{D+}, B^D)-有效的。

证　(1) 设 α 的证明序列是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，归纳证明任给 $1 \le i \le m$，α_i都是 (A_0, B^0)-有效的。具体证明可参考极小逻辑可靠性定理的证明。

(2) (3) 同 (1)。■

虽然也可以定义 (A, B) 的典范框架和典范模型，但我们无法证明典范框架是 (A, B)-框架，所以从典范模型没法得到权威主义系统 (A, B) 对于 (A, B)-有效性有完全性。

权威主义原则是说个人服从权威的意见，而弱权威主义原则是说个人不反对权威的意见。形式表示为：任给 $1 \le i \le n$，任给公式 α，都有$A\alpha \rightarrow \neg B_i \neg \alpha$。

在权威主义系统 (A, B) 中将权威主义公理改为弱权威主义公理，就得到的相应的弱权威主义系统 (A, B)*，特别地有 $(A_0, B^0)^*$, $(A_{D+}, B^0)^*$ 和 $(A_{D+}, B^D)^*$，相应的推理记为$\vdash^{0*}$，$\vdash^{D,0*}$和 $\vdash^{D*}$。

以下讨论 (A, B)*的系统性质。

11.5.5 定义 弱权威性质和弱权威框架

(1) $K = <o, W, T, U_1, \cdots, U_n, S, R_1, \cdots, R_n>$ 是框架。如果任给 $1 \le i \le n$，都有$U_i \cap T \neq \varnothing$，则称K有弱权威性质。

(2) Γ 是 K 生成的封闭框架类。如果 Γ 中的每个框架都有弱权威性质，则称 K 是权威框架。

11.5.6 定义 (A, B)*-框架

$K = <o, W, T, U_1, \cdots, U_n, S, R_1, \cdots, R_n>$ 是弱权威框架，(A, B)*是弱权威主义系统。

如果 $<o, W, U_1, \cdots, U_n, R_1, \cdots, R_n>$ 是B-框架且 $<o, W, T, S>$ 是A-框架，则称K是 (A, B)*-框架。全体 (A, B)*-框架组成的框架类称为 (A, B)*-框架类。

(A_{D+}, B^D)-框架也是 $(A_{D+}, B^D)^*$-框架，因为任给 $1 \le i \le n$，U_i都是非空的，所以从$U_i \subseteq T$能得到$U_i \cap T \neq \varnothing$。

不是 (A_{D+}, B^D)-框架的 $(A_{D+}, B^D)^*$-框架是存在的，取$a, b_1, \cdots, b_n$两两不同，取$T = \{a\}$，$S = \{<a, a>\}$，任给 $1 \le i \le n$，取$U_i = \{a, b_i\}$，R_i是U_i上的全关系，则K是 $(A_{D+}, B^D)^*$-框架但不 (A_{D+}, B^D)-框架。

全体 (A, B)*-框架确定的有效性称 (A, B)*-有效性。

11.5.7 引理　弱权威主义公理是 (A, B)*-有效的。

证　任给 (A, B)*-框架 K，任给 K 上赋值 V，如果 $o \in V(A\alpha)$，则

$T \subseteq V(\alpha)$，

任给 $1 \le i \le n$，由 $U_i \cap T \neq \varnothing$ 得

$U_i \cap V(\alpha) \neq \varnothing$，

所以

存在 $u \in U_i$，使得 $u \notin V(\neg\alpha)$

所以

$o \notin V(B_i \neg\alpha)$，

所以

$o \in V(\neg B_i \neg\alpha)$，

因此 $o \in V(A\alpha \to \neg B_i \neg\alpha)$。■

11.5.8 定理　可靠性定理

(1) 如果 $\vdash^{0*}\alpha$，则 α 是 (A_0, B^0)*-有效的。

(2) 如果 $\vdash^{0, D*}\alpha$，则 α 是 (A_0, B^D)*-有效的。

(3) 如果 $\vdash^{D*}\alpha$，则 α 是 (A_{D+}, B^D)*-有效的。

证　同定理 11.5.4。■

和权威主义系统类似，弱权威主义系统的完全性有待进一步讨论。

现在讨论集体权威。

在集体权威的多主体认知逻辑的形式语言中，有m个刻画权威的认知模态算子 $A_1,\cdots,A_m$，n个刻画群众的认知模态算子 $B_1,\cdots, B_n$。在权威内部由k-原则确定认定，对于群众，服从权威所认定的。因此k-权威主义原则的形式表示是：

任给 $1 \le i \le n$，任给公式 α，都有 $A^{(k)}\alpha \to B_i\alpha$。

$A = (A_1,\cdots, A_n)$ 是关于权威的基本系统，$B = (B_1,\cdots, B_n)$ 是关于群众的基本系统，它们的

公理加上k-权威主义公理

$A^{(k)}\alpha\rightarrow B_i\alpha$，$1\leq i\leq n$，

得到的系统称为k-权威主义系统，记为$(A, B)^{(k)}$。

和个人权威主义系统类似，在k-权威主义系统 $(A, B)^{(k)}$中，每个B_i是极小系统B_0或客观无矛盾系统B_{D+}，每个A_i也只能是极小系统A_0和客观无矛盾系统A_{D+}。

将 $(A, B)^{(k)}$中的 $\vdash$记为 $\vdash^{(k)}$。

以下讨论$(A, B)^{(k)}$的系统性质，为了加以区别，将相对于A_i的认知世界和认知通达关系分别记为T_i和S_i。

11.5.9 定义 *k*-权威性质和 *k*-权威框架

(1) $K = <o, W, T_1,\cdots, T_m, U_1,\cdots, U_n, S_1,\cdots, S_m, R_1,\cdots, R_n>$ 是框架。如果任给k-子集 π，任给 $1\leq i\leq n$，都有$U_i\subseteq\bigcup\{T_s\mid s\in\pi\}$，则称K有k-权威性质。

(2) Γ 是 K 生成的封闭框架类。如果 Γ 中的每个框架都有 k-权威性质，则称 K 是 k-权威框架。

11.5.10 定义 $(A, B)^{(k)}$-框架

$K = <o, W, T_1,\cdots, T_m, U_1,\cdots, U_n, S_1,\cdots, S_m, R_1,\cdots, R_n>$ 是k-权威框架，$(A, B)^{(k)}$是k-权威主义系统。如果

(1) $<o, W, T_1,\cdots, T_m, S_1,\cdots, S_m>$ 是A-框架；

(2) $<o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n>$ 是B-框架；

则称K是 $(A, B)^{(k)}$-框架。全体 $(A, B)^{(k)}$-框架组成的框架类称为 $(A, B)^{(k)}$-框架类。

$(A^D, B^D)^{(k)}$-框架是存在的。任给 $1\leq j\leq m$，取

$T_j = \{a\}$，$S_j = \{<a, a>\}$，

任给 $1\leq i\leq n$，取

$U_i = \{a\}$，$R_i = \{<a, a>\}$，

则K的任何模拟框架都是K本身，所以K生成的封闭框架类是{K}，而K有k-权威性质，因此K是k-权威框架。因为任给 $1\leq j\leq m$，T_j非空，任给 $1\leq i\leq n$，U_i非空，所以K是$(A^D, B^D)^{(k)}$-框

架。

注意 $(A_{D+}, B^{D})^{(k)}$-框架也是 $(A, B)^{(k)}$-框架，所以任意 $(A, B)^{(k)}$-框架都是存在的。

全体 $(A, B)^{(k)}$-框架确定的有效性称为 $(A, B)^{(k)}$-有效性。

11.5.11 引理 k-权威主义公理是 $(A, B)^{(k)}$-有效的。

证 任给 $(A, B)^{(k)}$-框架K，任给K上赋值V，如果$o\in V(A^{(k)}\alpha)$，则存在k-子集 π，使得$o\in V(A_{\pi}\alpha)$，所以

任给$s\in\pi$，都有$o\in V(A_s\alpha)$，

所以

任给$s\in\pi$，都有$T_s\subseteq V(\alpha)$，

所以

$$\bigcup\{T_s \mid s\in\pi\}\subseteq V(\alpha)$$

任给 $1\leq i\leq n$，由$U_i\subseteq\bigcup\{T_s \mid s\in\pi\}$得

$$U_i\subseteq V(\alpha)$$

所以

$$o\in V(B_i\alpha)$$

因此$o\in V(A^{(k)}\alpha\rightarrow B_i\alpha)$。■

11.5.12 定理 可靠性定理 如果 $\vdash^{(k)}\alpha$，则 α 是 $(A, B)^{(k)}$-有效的。

证 设 α 的证明序列是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$，归纳证明任给 $1\leq i\leq t$，α_i都是$(A, B)^{(k)}$-有效的。具体证明可参考极小逻辑可靠性定理的证明。■

虽然也可以定义 $(A, B)^{(k)}$的典范框架和典范模型，但我们无法证明典范框架是 $(A, B)^{(k)}$-框架，所以从典范模型没法得到k-权威主义系统 $(A, B^{(k)}$对于 $(A, B)^{(k)}$-有效性有完全性。

集体权威主义也有弱原则，弱k-权威主义原则的形式表示为：任给 $1\leq i\leq n$，任给公式α，都有$A^{(k)}\alpha\rightarrow\neg B_i\neg\alpha$。

在k-权威主义系统$(A, B)^{(k)}$ 中将k-权威主义公理改为弱k-权威主义公理，就得到的相应

的弱k-权威主义系统$(A, B)^{(k^*)}$。

将$(A, B)^{(k^*)}$中的推理记为$\vdash^{(k^*)}$。

以下讨论 $(A, B)^{(k^*)}$的系统性质。

11.5.13 定义 *弱 k-权威性质和弱 k-权威框架*

(1) $K = <o, W, T_1,\cdots, T_m, U_1,\cdots, U_n, S_1,\cdots, S_m, R_1,\cdots, R_n>$ 是框架。如果任给k-子集 π，任给 $1\le i\le n$，都有$U_i\cap\bigcup\{T_s \mid s\in\pi\}\neq\varnothing$，则称K有弱k-权威性质。

(2) Γ 是 K 生成的封闭框架类。如果 Γ 中的每个框架都有弱 k-权威性质，则称 K 是弱k-权威框架。

11.5.14 定义 $(A, B)^{(k^*)}$-框架

$K = <o, W, T_1,\cdots, T_m, U_1,\cdots, U_n, S_1,\cdots, S_m, R_1,\cdots, R_n>$ 是弱k-权威框架，$(A, B)^{(k^*)}$是弱k-权威主义系统。如果

(1) $<o, W, T_1,\cdots, T_m, S_1,\cdots, S_m>$ 是A-框架；

(2) $<o, W, U_1,\cdots, U_n, R_1,\cdots, R_n>$ 是B-框架；

则称K是$(A, B)^{(k^*)}$-框架。全体 $(A, B)^{(k^*)}$-框架组成的框架类称为 $(A, B)^{(k^*)}$-框架类。

$(A^D, B^D)^{(k)}$-框架也是 $(A^D, B^D)^{(k^*)}$-框架，因为任给 $1\le i\le n$，U_i都是非空的，所以从

$$U_i \subseteq \bigcup\{T_s \mid s\in\pi\}$$

能得到$U_i\cap\bigcup\{T_s \mid s\in\pi\} \neq\varnothing$。

取$a, b_1,\cdots, b_n$两两不同，取$T = \{a\}$，$S = \{<a, a>\}$，任给 $1\le i\le n$，取$U_i = \{a, b_i\}$，R_i是U_i上的全关系，则K是 $(A_{D+}, B^D)^*$-框架，但不是 (A_{D+}, B^D)-框架。

$(A^D, B^D)^{(k)}$-框架的$(A^D, B^D)^{(k^*)}$-框架是存在的，取$a, b_1,\cdots, b_n$两两不同，任给 $1\le j\le m$，取

$T_j = \{a\}$，$S_j = \{<a, a>\}$，

任给 $1\le i\le n$，取

$U_i = \{a, b_i\}$，R_i是U_i上的全关系，

则K是 $(A^D, B^D)^{(k^*)}$-框架但不是 $(A^D, B^D)^{(k)}$-框架。

全体 $(A, B)^{(k^*)}$-框架确定的有效性称 $(A, B)^{(k^*)}$-有效性。

11.5.15 引理 弱k-权威主义公理是 $(A, B)^{(k^*)}$-有效的。

证 任给 $(A, B)^{(k^*)}$-框架K，任给K上赋值V，如果

$$o\in V(A^{(k)}\alpha)$$

则存在k-子集π，使得$o\in V(A_\pi\alpha)$，所以，任给$s\in\pi$，都有

$$o\in V(A_s\alpha)$$

所以，

$$\text{任给} s\in\pi\text{，都有} T_s\subseteq V(\alpha),$$

所以

$$\bigcup\{T_s \mid s\in\pi\}\subseteq V(\alpha),$$

任给 $1\le i\le n$，由$U_i\cap\bigcup\{T_s \mid s\in\pi\}\neq\varnothing$ 得

$$U_i\cap V(\alpha)\neq\varnothing,$$

所以

$$o\notin V(B_i\neg\alpha),$$

所以

$$o\in V(\neg B_i\neg\alpha),$$

因此$o\in V(A^{(k)}\alpha\rightarrow\neg B_i\neg\alpha)$。■

11.5.12 定理 可靠性定理 如果 $\vdash^{(k^*)}\alpha$，则α是$(A, B)^{(k^*)}$-有效的。

证 设 α 的证明序列是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$，归纳证明任给 $1\le i\le t$，α_i都是$(A, B)^{(k^*)}$-有效的。具体证明可参考极小逻辑可靠性定理的证明。■

和 k-权威主义系统类似，弱 k-权威主义系统的完全性有待进一步研究。

第十二章

集体认定的逻辑

本章专门讨论集体主体认知的一种重要类型——集体认定。集体认定是从人们的社会实践中抽象出来的一种集体主体认知。这种集体主体认知有两个特点：一是明确以认定真作为命题的真值，而不是事实真；二是在集体认定中，个人的认定是隐蔽的。因此，对集体认定就不能采用一般的可能世界语义学。对此我们以多值语义为基础，构造了集体认定逻辑的语义。也因为个人的认定是隐蔽的，所以无法讨论集体认定和个人认定的关系，只能讨论集体认定的本身。

本章共分四节。§12.1 中讨论集体认定逻辑主要特点和处理方法，并引进集体认定逻辑的形式语言。§12.2 讨论建立集体认定逻辑语义的基础，一类特殊的多值逻辑。§12.3 建立集体认定逻辑的语义解释，并讨论在这种语义解释下，集体认定逻辑的几种特别的性质。§12.4 建立一些特殊的集体认定逻辑系统，特别的刻画少数服从多数原则的民主系统。

§12.1 集体认定逻辑的特点

集体认定是一种特殊的集体认知，集体认定是按一定的规则，综合集体中每个人的意见，对命题的一种断定。法律审判中的陪审员制度，社会政治生活中的选举、决议等都是集体认定的典型例子。

在前两章中用个体认知来定义集体认知的方法，用来处理集体认定这种类型的集体认知是不行的。

一、在集体认定中，关于个人的认知的信息是不完整的，大多数情况下，我们只知道最终的集体认定，而对于形成集体认知的个人认知是不知道的。

二、我们需要的也是最终的集体认定，而并不需要形成集体认定的个人认知，有时必须不知道。

我们需要有一种新方法处理集体认定。集体认定逻辑的形式语言是由命题逻辑的形式语言加上认定算子所组成，具体如下：

一、初始符号

(1) 命题变项 $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n\cdots\cdots$；

(2) 命题联结词 ~、∩；

(3) 公式联结词 ¬、∧；

(4) 认定算子 F

(5) 括号)，(。

二、形成规则

(1) 命题 用 α,β,γ 等表示

1.1 命题变项是命题；

1.2 如果 α 是命题，则 $\sim\alpha$ 是命题；

1.3 如果 α,β 命题，则 $\alpha\cap\beta$ 是命题。

(2) 公式 用 A, B, C 等表示

2.1 如果 α 是命题，则 $\mathrm{F}(\alpha)$是公式；

2.2 如果 A 是公式，则$\neg A$ 是公式；

2.3 如果 A, B 是公式，则 $(A\wedge B)$ 是公式。

命题的代入和置换如下：

12.1.1 定义 代入 $\alpha, \varphi_1,\cdots, \varphi_n$是命题，$p_1,\cdots, p_n$是命题变项。$\alpha(\varphi_1/p_1,\cdots, \varphi_n/p_n)$(在 α 中将 β_i代入p_i) 归纳定义如下：

(1) α 是命题变项，$\alpha(\varphi_1/p_1,\cdots,\varphi_n/p_n)=\begin{cases}\beta_i & 如果\alpha = p_i\\ \alpha & 如果\alpha \neq p_i\end{cases}$；

(2) $\alpha = \sim\beta$，则 $\alpha(\varphi_1/p_1,\cdots,\varphi_n/p_n) = \sim(\beta(\varphi_1/p_1,\cdots,\varphi_n/p_n))$；

(3) $\alpha = \beta\cap\gamma$，则

$\alpha(\varphi_1/p_1,\cdots,\varphi_n/p_n) = \beta(\varphi_1/p_1,\cdots,\varphi_n/p_n)\cap\gamma(\varphi_1/p_1,\cdots,\varphi_n/p_n)$。

12.1.2 定义 置换 α,φ,ψ 是公式。$\alpha[\psi/\varphi]$ (在 α 中将 ψ 置换 φ) 归纳定义如下：

(1) φ 不是 α 的子公式，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \alpha$；

(2) φ 是 α 的子公式，则

2.1 $\alpha = \varphi$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \psi$

2.2 $\alpha = \sim\beta$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \sim(\beta[\psi/\varphi])$；

2.3 $\alpha = \beta\cap\gamma$，则 $\alpha[\psi/\varphi] = \beta[\psi/\varphi]\cap\gamma[\psi/\varphi]$。

形如 $F(\alpha)$ 的公式称为原子公式，直观意义是集体认定 α。用定义引进公式联结词∨、∧和 ⇔ 如下：

(1) $(A\vee B) =_{df} \neg(\neg A\wedge\neg B)$。

(2) $(A\rightarrow B) =_{df} \neg(A\wedge\neg B)$。

(3) $(A\Leftrightarrow B) =_{df} ((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$。

对于公式只有置换。

12.1.3 定义 置换 A, D, E 是公式。$A[E/D]$(在 A 中将 ψ 置换 φ)归纳定义如下：

(1) φ 不是 A 的子公式，则 $A[E/D] = A$；

(2) φ 是 A 的子公式，则

2.1 $A = D$，则 $A[E/D] = E$

2.2 $A = \neg E$，则 $A[E/D] = \neg(B[E/D])$；

2.3 $A = B\wedge C$，则 $A[E/D] = B[E/D]\wedge C[\psi/\varphi]$。

集体认定的原则有两类。

个人认定的原则

(1) 有限性。个人对被认定的命题的态度只有有限种。

由(1)，个人对被认定的命题的态度模式可用某个(有限的)多值逻辑 D 来表示，这种多值逻辑称为态度逻辑。

(2) 拟古典逻辑性。个人对于被认定的命题的态度中至少包括“同意”和“反对”两种，且这两种态度满足古典逻辑规律。

(3) 无矛盾原则。不能同意矛盾式，不能反对重言式。

“同意”和“反对”两种态度称为明确的，其它态度称为不明确的。

(4) 明确原则。如果对每个支命题的态度都是不明确的，则对复合命题的态度也是不明确的。

(5) 保守原则。只有既同意α又同意β才同意$\alpha\cap\beta$。

(6) 谨慎原则。只有反对α或反对β才反对$\alpha\cap\beta$。

注意同意 $\alpha\cap\beta$ 和反对 $\alpha\cap\beta$ 有一个显著的区别：保守原则的反面也成立，即有，如果既同意 α 又同意 β 则同意 $\alpha\cap\beta$。谨慎原则的反面不一定成立，所以在有些态度逻辑中，从反对 α 或反对 β 并不能得到反对 $\alpha\cap\beta$。

集体认定的原则

(1) 有限性。作出集体认定的集体中的人数是有限的。

(2) 数量性。这个原则来源于“无记名投票”，作出集体认定的根据是同意的人数，而不管是谁同意。

由 (1) 和 (2)，我们并不需要一个具体的人的集合，而只需要一个自然数——作出集体认定的集体的总人数，这个数记为 n。

因为个人的态度模式可以不一样，所以还需要n个态度逻辑$D_1,\cdots, D_n$。

(3) 单调性。如果有 k 个人同意时作出了集体认定，则多于 k 个人同意时也必定作出了集体认定。

由 (3)，我们还需要另一个自然数——作出集体认定时同意人数的最小数，这个数记为 k。只要同意的人数大于等于 k，就意味着作出了集体认定。

(4) 非退化性。至少有一个人同意时才能作出集体认定。形式地说，也就是要求 $k\geq 1$。

我们首先根据个人认定的原则，一般地讨论刻画个人认定态度的一类多值逻辑——态

度逻辑。它是建立集体认定逻辑语义学的基础。然后根据集体认定的原则，建立集体认定逻辑的语义学，这种语义学不是可能世界语义学，有其比较独特的性质。其中，特别有用的是只和数量有关，而和个人的态度无关的性质。因为在建立集体认定的机制时，我们只能控制人数，总人数和同意的人数，即以上讨论的 n 和 k，而无法控制个人的态度。

接着讨论几种重要的集体认定逻辑，重点讨论刻画“少数服从多数”原则的集体认定逻辑——民主逻辑。

最后，将这种直接刻画的集体认知和前两章中由个人认知定义的集体认知加以比较，讨论它们在理论上和应用上的区别。

§12.2　态度逻辑

态度逻辑是一类特殊的多值逻辑。它们有相同的形式语言。

一、初始符号

(1) 命题变项　$\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n\cdots\cdots$;

(2) 命题联结词 ~、∩。

二、形成规则

(1) 命题变项是命题；

(2) 如果 α 是命题，则 $\sim\alpha$ 是命题；

(3) 如果 α,β 是命题，则 $\alpha\cap\beta$ 是命题。

这种形式语言中缺乏析取和蕴涵，但对于刻画产生集体认定的个人态度来说，已经足够了。

我们首先在这种语言中定义一般的多值逻辑。

12.2.1 定义　多值逻辑　D = <R, f, g>，如果 D 满足：

(1) R 是基数大于 1 的有限集，

(2) f 是 R 上的一元函数，

(3) g 是 R 上的二元函数，

则称 D 是一个 (有限) 多值逻辑。

R 中的元素称为 (广义的) 真值。

设R = $\{a_1,\cdots, a_n\}$，可以用列举函数值的方法刻画函数f和g，所以一个多值逻辑D可以用以下两张表 (D是真值表) 来刻画：

f	
a_1	$f(a_1)$
⋮	⋮
a_n	$f(a_n)$

g	a_1	⋯	a_n
a_1	$G(a_1, a_1)$	⋯	$g(a_n, a_1)$
⋮	⋮	⋯	⋮
a_n	$G(a_1, a_n)$	⋯	$g(a_n, a_n)$

12.2.2 例 古典逻辑 P 是多值逻辑，它有两个真值 1 和 0，集合{1, 0}特记为 T，它的真值表如下：

f	
1	0
0	1

g	1	0
1	1	0
0	0	0

12.2.3 例 Bochvar 三值逻辑 B 和 Kleene 三值逻辑都是多值逻辑。

B 有三个真值 1, 0 和 u，它的真值表如下：

f	
1	0
0	1
u	u

G	1	0	u
1	1	0	u
0	0	0	u
U	u	u	u

K 有三个真值 1, 0 和 1/2，它的真值表如下：

f	
1	0
0	1
1/2	1/2

G	1	0	1/2
1	1	0	1/2
0	0	0	0
1/2	1/2	0	1/2

12.2.4 定义　赋值　$D = <R, f, g>$是多值逻辑，V 是全体命题的集合到 R 的映射，如果 V 满足：

(1) $V(\sim\alpha) = f(V(\alpha))$，

(2) $V(\alpha\cap\beta) = g(V(\alpha),V(\beta))$，

则称 V 是 D 上的一个赋值。

12.2.5 定义　重言式和矛盾式　α 是命题。

(1) 如果任给 P 上赋值 V，都有 $V(\alpha) = 1$，则称 α 是重言式。

(2) 如果任给 P 上赋值 V，都有 $V(\alpha) = 0$，则称 α 是矛盾式。

12.2.6 定义　一致　$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是m个命题。如果存在P上赋值V，使得$V(\alpha_1) = 1,\cdots, V(\alpha_m) = 1$，则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是一致的。否则称为不一致的。

显然，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是不一致的当且仅当 $\sim(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_m)$ 是矛盾式。

12.2.7 定义　独立　$\alpha_1,\cdots, \alpha_m$是m个命题。如果其中任何m-1 个命题和另一个命题的否定是一致的，则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的。

12.2.8 定理　$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是m个独立的命题，则任给 $1\le j\le m$，都存在P上赋值V，使得

$$V(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i \neq j \\ 0 & \text{如果 } i = j \text{。}\blacksquare \end{cases}$$

12.2.9 定义　扩充　$D_1 = <R_1, f_1, g_1>$ 和$D_2 = <R_2, f_2, g_2>$ 都是多值逻辑。如果D_1和D_2满足：

(1) $D_2 \subseteq D_1$，

(2) $f_1|_{R_2} = f_2$，

(3) $g_1|_{R_2} = g_2$，

则称D_1是D_2的扩充。

如果D_1是D_2的扩充，则D_2上的赋值也是D_1上的赋值。

个人认定有 6 条原则，满足这 6 条原则的多值逻辑称为态度逻辑。

12.2.10 定义 态度逻辑 $D = \langle R, f, g\rangle$ 是多值逻辑，如果 D 满足：

(1) D 是古典逻辑 P 的扩充，

(2) f 和 g 对于 $R \setminus T$ 是封闭的，

(3) 任给重言式 α，任给赋值 V，都有 $V(\alpha) \neq 0$，

(4) 任给矛盾式 α，任给赋值 V，都有 $V(\alpha) \neq 1$，

(5) 任给公式 α, β，任给赋值 V，如果 $V(\alpha \cap \beta) = 1$，则 $V(\alpha) = 1$ 且 $V(\beta) = 1$，

(6) 任给公式 α, β，任给赋值 V，如果 $V(\alpha \cap \beta) = 0$，则 $V(\alpha) = 0$ 或 $V(\beta) = 0$，

则称 D 是一个态度逻辑。

条件 (1) 对应拟古典逻辑性，条件 (2) 对应明确原则，条件 (3) 和 (4) 对应无矛盾原则，条件 (5) 对应保守原则，条件 (6) 对应谨慎原则。

12.2.11 例 Bochvar 三值逻辑 B 和 Kleen 三值逻辑都是态度逻辑。

态度逻辑有以下性质。

12.2.12 定理 $D = \langle R, f, g\rangle$是态度逻辑，则

(1) P 上的赋值也是 D 上的赋值。

(2) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是一致的，则存在D上赋值V，使得$V(\alpha_1) = 1, \cdots, V(\alpha_m) = 1$。

(3) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是不一致的，则不存在D上赋值V，使得$V(\alpha_1) = 1, \cdots, V(\alpha_m) = 1$。

(4) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是不一致的，则则任给 $1 \le j \le m$，都存在D上赋值V，使得

$$V(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i \neq j \\ 0 & \text{如果 } i = j。 \end{cases}$$

证 (1) 因为 D 是 P 的扩充。

(2) 由一致的定义和 (1)。

(3) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是不一致的，则~$(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_m)$ 是矛盾式，由态度逻辑的条件 (4) 得，不存在D上赋值V，使得$V(\sim(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_m)) = 1$，

所以

不存在D上赋值V，使得$V(\alpha_1) = 1,\cdots, V(\alpha_m) = 1$。

(4) 由定理 12.2.8 和(1)。■

定理 12.2.12 中的赋值(4)称为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值。

§12.3 集体认定逻辑的语义

集体认定具有有限性、数量性、单调性和非退化性。根据这些原则，我们需要用满足 $1\le k\le n$ 的两个自然数，n 个态度逻辑来刻画集体认定。

12.3.1 定义 框架 $K = \langle k, n, D_1,\cdots, D_n\rangle$，如果K满足：

(1) $1\le k\le n$，

(2) 任给 $1\le i\le n$，D_i都是态度逻辑。

则称 K 是框架。

12.3.2 定义 赋值 $K = \langle k, n, D_1,\cdots, D_n\rangle$ 是框架，K上一个赋值是 $\sigma = \langle V_1,\cdots, V_n\rangle$，其中任给 $1\le i\le n$，V_i是D_i上赋值。

公式在 σ 下的值(t 或 f)归纳定义如下：

$$(1)\ \sigma(F(\alpha)) = \begin{cases} t & \text{如果 } |\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| \ge k \\ f & \text{如果 } |\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| < k， \end{cases}$$

$$(2)\ \sigma(\neg A) = \begin{cases} t & \text{如果 } \sigma(A) = f \\ f & \text{如果 } \sigma(A) = t， \end{cases}$$

$$(3)\ \sigma(A\wedge B) = \begin{cases} t & \text{如果 } \sigma(A) = t \text{ 且 } \sigma(A) = t \\ f & \text{如果 } \sigma(A) = f \text{ 或 } \sigma(A) = f， \end{cases}$$

12.3.3 定义 满足

(1) K 是框架。如果任给 K 上赋值 σ，都有$\sigma(A)$ = t，则称 K 满足 A，记为 K $\models A$。

(2) Γ 是框架类。如果任给 K$\in\Gamma$，都有 K 满足 A，则称 Γ 满足 A，记为$\Gamma\models A$。

在以下的讨论中，都设K = $\langle k, n, D_1,\cdots, D_n\rangle$，K上赋值简称为赋值。

与人数有关，与每个人的态度模式无关的性质称为集体认定逻辑的数量特征，它们可以用与n, k有关，与 $\langle D_1,\cdots, D_n\rangle$ 无关的公式来表示。

12.3.3 定义 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$是命题，$\sigma = \langle V_1,\cdots, V_n\rangle$ 是赋值。

(1) 任给 $1\le i\le n$，令$a_i(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = |\{j \mid V_i(\alpha_j) = 1\}|$。

(2) 任给 $1\le j\le m$，令$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = |\{i \mid V_i(\alpha_j) = 1\}|$。

(3) 令$a(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = a_1(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+\cdots+a_n(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$，

$b(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = b_1(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+\cdots+b_k(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$。

对于命题 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$和赋值 $\sigma = \langle V_1,\cdots, V_n\rangle$，我们构造以下表格(称为$\alpha_1,\cdots, \alpha_m, \sigma$ 的特征表)：

	V_1	$\cdots$	V_i	$\cdots$	V_n
α_1	$V_1(\alpha_1)$	$\cdots$	$V_i(\alpha_1)$	$\cdots$	$V_n(\alpha_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
α_j	$V_1(\alpha_j)$	$\cdots$	$V_i(\alpha_j)$	$\cdots$	$V_n(\alpha_j)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
α_m	$V_1(\alpha_m)$	$\cdots$	$V_i(\alpha_m)$	$\cdots$	$V_n(\alpha_m)$

$a_i(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$ 就是第i列中 1 的个数，$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$ 就是第j行中 1 的个数。这样$a(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$ 和$b(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$ 都是表中 1 的个数，所以$a(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$ 和$b(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$相等。

由赋值的条件可知：$\sigma(F(\alpha_j))$ = t就是 $|\{i \mid V_i(\alpha_j) = 1\}| \ge k$，也就是$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\ge k$。

所以有：

12.3.4 引理 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是命题，$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$ 是赋值。

(1) $a(\sigma, \alpha_1,\cdots,\alpha_m) = b(\sigma, \alpha_1,\cdots,\alpha_m)$。

(2) 任给 $1\le j\le m$，$\sigma(F(\alpha_j)) = t$当且仅当$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots,\alpha_m)\ge k$。■

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是不一致的命题，则任给 $1\le i\le n$，都存在 $1\le j\le m$，使得$V_i(\alpha_j) \ne 1$，因此有：

12.3.5 引理 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是不一致的命题，则任给 $1\le i\le n$，都有$a_i(\sigma, \alpha_1,\cdots,\alpha_m)\le m-1$。■

12.3.6 定义 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的命题。如果任给 $1\le i\le n$，V_i都是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值，则称赋值 $\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值。

如果 σ 是$\alpha_1,\cdots, \alpha_m$的特征赋值，则在$\alpha_1,\cdots, \alpha_m, \sigma$ 的特征表中，每一列都是$m–1$ 个 1 和一个 0。反之，如果在$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\sigma$的特征表中，每一列都是$m–1$ 个 1 和一个 0，则σ是$\alpha_1,\cdots, \alpha_m$的特征赋值。

σ 是$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值，在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\sigma$ 的特征表中，将某一行中的某个 0 和某个 1 对调，就得到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\tau$ 的特征表，其中 τ 是另外一个特征赋值。而特征表中 1 的总数不变。

我们可以如此不断地调整 0 和 1 的位置，使得每一列 1 的总个数的差别达到最小 (0 或 1)，这样每一列 1 的总个数就大于 1 的平均数 $(n(m–1)/m)$ 减 1。

12.3.7 引理 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是独立的命题，则存在赋值 σ，使得任给 $1\le j\le m$，都有

$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots,\alpha_m)>(n(m–1)/m)–1$。

证 取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的特征赋值 ρ，则在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\rho$ 的特征表中，1 的总个数$b(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = n(m–1)$。所以 1 对于行的平均数是$n(m–1)/m$。

如果存在 $1\le j\le m$，使得

$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots,\alpha_m)\le(n(m–1)/m)–1$，

则存在 $1\le s\le m$，使得

$b_s(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\geq(n(m-1)/m)+1$，

所以存在 $1\leq i\leq m$，使得 $V_i(\alpha_s) = 1$ 且 $V_i(\alpha_j) = 0$。

取 V'_i 使得 $V'_i(\alpha_s) = 0$ 且 $V'_i(\alpha_j) = 1$，其它同 V_i，则 V'_i 也是特征赋值，将 V'_i 代替 V_i 得到赋值 τ(也是特征赋值)，就有

$b_s(\tau, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)>(n(m-1)/m)-1$，

$b_j(\tau, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)>b_j(\rho, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$，

这样在保证 $b_s>(n(m-1)/m)-1$ 的前提下，使得 b_j 增大。多次使用这样的方法，可以使 $b_j>(n(m-1)/m)-1$。

对另外的 $\leq(n(m-1)/m)-1$ 的 b_j，用同样的方法，最终得到特征赋值 σ，使得任给 $1\leq j\leq m$，都有

$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)>(n(m-1)/m)-1$。■

12.3.8 定理 任给 $m\geq1$，任给m个独立的不一致的命题 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$，都有 $K\models\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$ 当且仅当 $k/n>(m-1)/m$。

证 设 $k/n>(m-1)/m$，证明 $K\models\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$。

任给赋值 σ，任给 $1\leq i\leq n$，由 $\alpha_1,\cdots, \alpha_k$ 是不一致的得

$a_i(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\leq m-1$，

所以

$a(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\leq n(m-1)$，

由 $b(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = a(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)$ 得

$b_1(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+\cdots+b_k(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\leq n(m-1)$，

所以存在 $1\leq j\leq m$，使得

$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\leq n(m-1)/m<k$，

由引理 12.3.4(2)得

$\sigma(F(\alpha_j)) = f$，

因此 $\sigma(\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_k))) = t$。

设 $(m-1)/m\leq k/n$，证明存在赋值 σ，使得 $\sigma(\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_k))) = f$。

因为 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$ 是独立的，所以由引理 12.3.7 得存在赋值 σ，使得任给 $1\leq j\leq k$，都有

$b_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)>(n(m-1)/m)-1 = k-1$。

所以任给 $1\le j\le m$，都有

$b_j\ge k$，

由引理 12.3.4(2)得任给 $1\le j\le m$，都有

$\sigma(F(\alpha_j)) = t$，

因此$\sigma(\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))) = f$。■

12.3.9 推论

(1) 如果$k = n$，则任给$m\ge 1$，任给m个独立的不一致的命题 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$，都有$K \models \neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$。

(2) 如果$k<n$，则存在$m\ge 1$，使得任给m个独立的不一致的命题 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$，都有$K \not\models \neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$。

12.3.10 定义 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$是命题，$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$是赋值。

(1) 任给 $1\le j\le m$，令 $\beta_j = \alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{j-1}\wedge\alpha_{j+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_m$。

(2) 任给 $1\le j\le m$，令$F^m(\alpha_1,\cdots, \alpha_m) = F(\beta_1)\wedge\cdots\wedge F(\beta_m)$。

(3) 令$c(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = |\{i \mid V_i(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m) = 1\}|$。

(4) 任给 $1\le j\le m$，令$d_j = |\{i \mid V_i(\beta_j) = 1$ 且$V_i(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m) = 0\}|$。

12.3.11 引理 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$是命题，$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$是赋值。

(1) $c(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+d_1(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+\cdots+d_m(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\le n$。

(2) $\sigma(F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m)) = t$当且仅当$c(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\ge k$。

(3) 任给 $1\le j\le m$，$\sigma(F(\beta_j)) = t$，当且仅当$c(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+d_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\ge k$。

(4) $\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots, \alpha_k)) = t$，当且仅当，任给 $1\le j\le m$，$c(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)+d_j(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m)\ge k$。

(5) 如果$\alpha_1,\cdots, \alpha_k$是独立的和一致的，则任给满足$u+v_1+\cdots+v_m = n$的$u, v_1,\cdots, v_m$，都存在赋值 σ，使得

$c(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = u$,

$d_1(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = v_1,\cdots, d_k(\sigma, \alpha_1,\cdots, \alpha_m) = v_k$。■

12.3.12 定理 任给m≥2，任给m个独立的一致的命题 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，都有

$K \models F^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\to F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m)$，当且仅当，$n-k<m-1$。

证 设$n-k<m-1$，证明任给赋值 σ，如果$\sigma(F^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = t$，则$\sigma(F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_m)) = t$。

如果 $\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = t$，则由引理 12.3.11(4) 得

任给 $1\leq j\leq m$，都有$c(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+d_j(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\geq k$，

由引理 12.3.11(1)得

$$c(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+d_1(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+\cdots+d_k(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\leq n<m-1+k$$

所以

存在 $1\leq j\leq k$，使得$d_j(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m) = 0$，

所以

$c(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\geq k$，

由引理 12.3.11(2) 得 $\sigma(F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)) = t$。

设$n-k\geq m-1$，证明存在赋值 σ，使得 $\sigma(F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)) = f$且 $\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = t$。

取$u = k-1$, $v_1 = 1,\cdots, v_{m-1} = 1$, $v_m = n-k-m+2\geq 1$，由引理 12.3.11(5)得存在赋值σ，使得

$c(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m) = u$，

$d_1(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m) = v_1,\cdots, d_m(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m) = v_m$，

所以存在赋值σ，使得

$d_1(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m) = k-1<k$，

任给 $1\leq j\leq m$，都有$d_j(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\geq 1$，

所以

任给 $1\leq j\leq m$，都有$c(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+d_j(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\geq k$，

由引理 12.3.11(2) 得

$\sigma(F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)) = f$

由引理 12.3.11(4)得

$\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = t$。■

§12.4　民主逻辑

12.4.1 定义　逻辑　L 是一个公式集，如果存在框架类Γ，使得

$$A\in L \text{ 当且仅当 } \Gamma \models A,$$

则称 L 是由Γ所确定的集体认定逻辑，简称逻辑。

12.4.2 定义　逻辑有效和逻辑等价　L 是逻辑。

(1) 如果 $A\in L$，则称 A 是 L-逻辑有效的，简称 L-有效。

(2) 如果 $A\Leftrightarrow B\in L$，则称 A 和 B 逻辑等价，简称 L-等价。

由所有框架的框架类所确定的逻辑称为极小逻辑，极小逻辑记为L_0，它体现了集体认定逻辑最普遍的规律。

12.4.3 定理　极小逻辑L_0有以下性质。

(1) 个人无矛盾原则　如果 α 是矛盾式，则$\neg F(\alpha)$ 是L_0-有效的。

(2) 合取原则　$F(\alpha\cap\beta)\to F(\alpha)\wedge F(\beta)$ 是L_0-有效的。

(3) 弱等价原则

$F({\sim}{\sim}\alpha)$ 和$F(\alpha)$ L_0-等价，

$F(\alpha\cap\beta)$ 和$F(\beta\cap\alpha)$ L_0-等价，

$F((\alpha\cap\beta)\cap\gamma)$ 和$F(\alpha\cap(\beta\cap\gamma))$ L_0-等价。

证　(1) 设 α 是矛盾式，证明任给框架K，任给K上赋值 $\sigma = \langle V_1,\cdots, V_n\rangle$，都有 $\sigma(\neg F(\alpha)) = t$。

因为 α 是矛盾式，所以任给 $1\le i\le n$，都有$V_i(\alpha)\neq 1$，所以 $\sigma(F(\alpha)) = f$，因此 $\sigma(\neg F(\alpha)) = t$。

(2) 任给框架K，任给K上赋值$\sigma = \langle V_1,\cdots, V_n\rangle$，证明如果$\sigma(F(\alpha\cap\beta)) = t$，则$\sigma(F(\alpha)\wedge F(\beta)) = t$。

如果 $\sigma(F(\alpha\cap\beta)) = t$，则 $|\{i \mid V_i(\alpha\cap\beta) = 1\}|\ge k$，所以

$|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}|\ge k$且 $|\{i \mid V_i(\beta) = 1\}|\ge k$

所以

$\sigma(F(\alpha)) = t$ 且$\sigma(F(\beta)) = t$。

因此$\sigma(F(\alpha)\wedge F(\beta)) = t$。

(3) 任给框架K，任给K上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，都有

$\sigma(F(\sim\sim\alpha)) = t$ 当且仅当 $|\{i \mid V_i(\sim\sim\alpha) = 1\}| \geq k$

当且仅当 $|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| \geq k$

当且仅当 $\sigma(F(\alpha)) = t$。

$\sigma(F(\alpha\cap\beta)) = t$ 当且仅当 $|\{i \mid V_i(\alpha\cap\beta) = 1\}| \geq k$

当且仅当 $|\{i \mid V_i(\beta\cap\alpha) = 1\}| \geq k$

当且仅当 $\sigma(F(\beta\cap\alpha)) = t$。

$\sigma(F(\alpha\cap\beta)\cap\gamma)) = t$ 当且仅当 $|\{i \mid V_i(\alpha\cap\beta)\cap\gamma) = 1\}| \geq k$

当且仅当 $|\{i \mid V_i(\alpha\cap(\beta\cap\gamma)) = 1\}| \geq k$

当且仅当 $\sigma(F(\alpha\cap(\beta\cap\gamma))) = t$。■

12.4.4 定义 (D, λ)-*框架* $K = <k, n, D_1,\cdots, D_n>$是框架，$\lambda>0$，D是态度逻辑。如果K满足：

(1) $k/n>\lambda$，

(2) 任给 $1\leq k\leq n$，都有$D_i = D$，

则称 K 是(D, λ)-框架。

(D, λ)-框架简记为 $K = <k, n, D>$。

12.4.5 定义 (D, λ)-*逻辑* 由全体(D, λ)-框架所确定的逻辑称为(D, λ)-逻辑。

对于$\lambda>0$，存在唯一的 m，使得$(m-1)/m\leq\lambda<m/(m+1)$，m 称为(D, λ)-逻辑的特征值。

(D, λ)-逻辑有弱无矛盾原则。

12.4.5 定理 *弱无矛盾原则* L 是(D, λ)-逻辑，m 是其特征值，则

(1) 任给m个独立的不一致的命题$\alpha_1,\cdots, \alpha_m$，

$\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$

都是 L-有效的。

(2) 任给m个独立的不一致的命题$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，

$\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_{m+1}))$

都不是 L-有效的。

证 (1) 任给(D,λ)-框架 K，都有 $k/n>\lambda\geq(m-1)/m$，由定理 12.3.8 得

$K\models\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$。

因此$\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_m))$是L-有效的。

(2) 取框架 K = <m, m+1, D>，因为 $m/(m+1)>\lambda$，所以 K 是(D, λ)-框架，由 $m/(m+1)\leq((m+1)-1)/(m+1)$和定理 12.3.8 得

$K\not\models\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_{m+1}))$。

因此$\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_{m+1}))$不是L-有效的。■

(D, 1/2)-逻辑称为 D-民主逻辑。(因为 k/n>1/2 体现了“少数服从多数”的民主原则)。

D-民主逻辑记为L_D。D-民主逻辑最重要的是D是二值或三值态度逻辑。因为t的意义是同意，f的意义是反对，第三值的意义自然就是弃权。

二值逻辑只有一个古典逻辑 P，它用于没有弃权的场合。

三值逻辑用于有弃权的场合，典型代表的 B 和 K。我们从认知角度讨论集体认定，弃权的意义是对于命题的不理解。

由态度逻辑的定义可知，同意合取命题的性质是一样的，差别在于反对合取命题时的态度不一样。

B 是谨慎态度，不理解的情况下不表态。K 是积极态度，只要有一个命题反对就反对合取命题。

以下详细讨论P-民主逻辑L_P，它的框架简记为<k, n>，称为L_P-框架。P-民主逻辑有更好的性质。

12.4.6 定理

(1) 重言式原则 如果α是重言式，则$F(\alpha)$是L_P-有效的。

(2) 等价原则 如果$\alpha\Leftrightarrow\beta$是重言式，则$F(\alpha)$和$F(\beta)$$L_P$-等价。

(3) 化归原则　$F(\sim\alpha)$和$\neg F(\alpha)$ L_P-等价。

证　(1) 任给L_P-框架K，任给K上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，由$\alpha$是重言式得

任给 $1\leq i\leq n$，都有$V_i(\alpha) = 1$，

所以

$|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| = n\geq k$，

因此$\sigma(F(\alpha)) = t$。

(2) 任给L_P-框架K，任给K上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，由$\alpha\Leftrightarrow\beta$是重言式得

任给 $1\leq i\leq n$，都有$V_i(\alpha) = V_i(\beta)$，

所以

$|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| = |\{i \mid V_i(\beta) = 1\}|$，

所以

$\sigma(F(\alpha)) = t$ 当且仅当$\sigma(F(\beta)) = t$，

因此$F(\alpha)$和$F(\beta)$ L_P-等价。

(3) 任给L_P-框架K，任给K上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，证明：$\sigma(F(\sim\alpha)) = t$当且仅当$\sigma(F(\alpha)) = f$。

如果$\sigma(F(\sim\alpha)) = t$，则

$|\{i \mid V_i(\sim\alpha) = 1\}|\geq k$，

所以

$|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| = n-k<k$，

因此$\sigma(F(\alpha)) = f$。

如果$\sigma(F(\alpha)) = f$，则

$|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}|<k$，

所以

$|\{i \mid V_i(\sim\alpha) = 1\}| = n-k\geq k$，

因此$\sigma(F(\sim\alpha)) = t$。■

12.4.7 定义　范式

(1) $A = \neg F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge\neg F(\alpha_s)$称为简单析取。

(2) $B = B_1 \wedge \cdots \wedge B_m$，如果每个$B_i$都是简单析取，则称B为合取范式。

12.4.8 定理　*范式存在定理*　任给公式 A，存在合取范式 B，使得 A 和 B 等价。

证　将公式 A 中形如 F(α)的子公式看作命题变项，用古典命题逻辑的方法将其化为古典命题逻辑的合取范式。

注意，这时 F(α)并不一定以¬F(α)形式出现，也可以以 F(α)形式出现。将以 F(α)形式出现的 F(α)用等价原则化归为 F(~~α)，再用化归原则化归为¬F(~α)。■

12.4.9 定理　合取范式 B 是有效的当且仅当它的每个合取支是有效的。■

¬F(α_1)∨⋯∨¬F(α_s)是简单析取，其中有m个不同的命题变项，所以对$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$而言，有 $t = 2^m$个不同的古典赋值$V^1,\cdots,V^t$。任给 $1 \le i \le s$，任给 $1 \le j \le t$，令$a_{ij} = V^j(\alpha_i)$。

12.4.10 引理　σ = <$V_1,\cdots,V_n$> 是框架 <k, n>上的赋值，任给 $1 \le j \le t$，令$u_j = |\{i \mid V_i = V^j\}|$。则

(1) $u_1+\cdots+u_t = n$。

任给 $1 \le i \le s$，都有

(2) $a_{i1}u_1+\cdots+a_{it}u_t = |\{l \mid V_l(\alpha_i) = 1\}|$。

(3) σ(¬F(α_i)) = f当且仅当$a_{i1}u_1+\cdots+a_{it}u_t \ge k$。

(4) 如果σ(¬F(α_i)) = f，则 $2(a_{i1}u_1+\cdots+a_{it}u_t) > (u_1+\cdots+u_t)$。■

12.4.11 定理　如果¬F(α_1)∨⋯∨¬F(α_s)不是有效的，则不等式方程组

$$\begin{cases} 2(a_{11}x_1+\cdots+a_{1t}x_t) > (x_1+\cdots+x_t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ 2(a_{s1}x_1+\cdots+a_{st}x_t) > (x_1+\cdots+x_t) \end{cases}$$

有非负整数解。

证　由引理 12.4.10(3)。■

12.4.11 定理　如果不等式方程组

$$\begin{cases} 2(a_{11}x_1+\cdots+a_{1t}x_t)>(x_1+\cdots+x_t) \\ \qquad\qquad\vdots \\ 2(a_{s1}x_1+\cdots+a_{st}x_t)>(x_1+\cdots+x_t) \end{cases}$$

有非负整数解，则$\neg F(\alpha_1)\vee\cdots\vee\neg F(\alpha_s)$不是有效的。

证　设$u_1,\cdots,u_t$是一组解，令

$n = u_1+\cdots+u_t$，

$k = \min\{a_{i1}u_1+\cdots+a_{it}u_t \mid 1\le i\le s\}$，

则$k/n>1/2$，因此$<k, n>$是L_P-框架。

取u_1个$V^1,\cdots, u_t$个V^t，构成$<k, n>$的一个赋值σ。任给 $1\le i\le s$，由$a_{i1}u_1+\cdots+a_{it}u_t\ge m$得

$\sigma(\neg F(\alpha_i)) = f$。

因此$\sigma(\neg F(\alpha_1)\vee\cdots\vee\neg F(\alpha_s)) = f$。■

方程组

$$\begin{cases} 2(a_{11}x_1+\cdots+a_{1t}x_t)>(x_1+\cdots+x_t) \\ \qquad\qquad\vdots \\ 2(a_{s1}x_1+\cdots+a_{st}x_t)>(x_1+\cdots+x_t) \end{cases}$$

等价于方程组

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)x_1+\cdots+(2a_{1t}-1)x_t>0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ (2a_{s1}-1)x_1+\cdots+(2a_{st}-1)x_t>0 \end{cases}$$

这样，简单民主逻辑的判定问题就化归为整系数齐次不等式方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1+\cdots+b_{1t}x_t>0 \\ \qquad\vdots \\ b_{s1}x_1+\cdots+b_{st}x_t>0 \end{cases}$$

是否有非负整数解的判定问题。这个问题是可判定的，所以：

12.4.12 定理　P-民主逻辑是可判定的。■